Feuille de TD 7
Loi normale et théorème de convergence

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(8, 4^2)$. Calculer

$$P(X < 7{,}52),\ P(X > 8{,}48),\ P(6 < X < 10),\ P((X > 6)|(X > 5)).$$

Exercice 2.

1. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(4, 4)$ déterminer $P(Y \leq 6)$.
2. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(3, (1, 5)^2)$ déterminer x pour que $P(Y \leq x) = 0, 4218$.
3. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5, 4)$ déterminer $P(2, 5 \leq Y \leq 6, 5)$.
4. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(6, 4)$ déterminer un intervalle, centré sur la moyenne dans lequel est Y prend ses valeurs avec la probabilité $0, 9$.

Exercice 3.

1. Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et x un réel positif. Exprimer en fonction de $\alpha = P(|X| > x)$ les probabilités $P(X > x)$ et $P(X < -x)$.
2. Lors d'un tir, on admet que les longueurs de tir suivent une même loi normale. On constate en ayant effectué un grand nombre de tirs que 10% des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km et 25% à une distance inférieure à 1,4 km. Donner une valeur approchée de la moyenne et de l'écart-type de la loi normale suivie par les longueurs de tir.

Exercice 4.
Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0 mm et d'écart-type 0,015 mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7,98 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8,02 mm.

1. Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée ?
2. Lorsque la bille est trop petite elle est rejetée, lorsqu'elle est trop grande elle est retaillée convenablement (elle ne sera pas écartée après avoir été retaillée). Le coût de fabrication d'une bille est de 1 euro et le surcoût pour retailler une bille est de 30 centimes d'euros.
   Soit C la variable aléatoire coût de fabrication d'une bille, déterminer la loi de C.
3. Soit B la variable aléatoire bénéfice réalisé pour une bille prise au hasard (parmi toutes les billes produites). Déterminer la loi de B pour un prix de vente d'une bille de x euros (on remarquera que B ne peut prendre que les trois valeurs : -1 ; $x - 1, 3$; $x - 1$).
4. Déterminer le prix de vente minimal pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Exercice 5.
Le pH de l'urine d'un adulte sain est une variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(6, 25, (0, 36)^2)$. Déterminer un intervalle, centré autour de la moyenne , où se trouve la mesure du pH urinaire pour 75% des adultes sains.

Exercice 6.
On désigne par $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ les rendements en quintaux par hectare de n parcelles ensemencées avec une même variété de céréale. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit la variable aléatoire moyenne $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de M.
2. Quelle est la loi de M ?
3. On suppose que $\sigma = 2, 5$, combien de parcelles faut-il observer pour que $P(\mu - 1 \leq M \leq \mu + 1) > 0, 99$?

Exercice 7.
Pour un certain type de graines, la probabilité de germination est $p = 0, 8$. Une personne sème 400 graines. Donner une estimation de la probabilité que 300 au moins germent.

Exercice 8.
Dans une population homogène de 20000 habitants, la probabilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée contre la grippe est de 0,4.
Donner une estimation du nombre de vaccins dont on doit disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieur à 0,1 ?

Exercice 9.
Une population s'apprte voter pour deux candidats : Truc et Muche. On effectue un sondage d'opinion sur 250 personnes choisies au hasard, et on note X le nombre de personnes ayant l'intention de voter pour Truc. On fait les hypothses simplificatrices suivantes :

- Tout le monde vote (soit pour Truc, soit pour Muche) et personne ne ment ou ne change d'avis aprs avoir t sond.
- Une proportion α de personnes vont voter pour Truc.
- La population est trs grand devant la taille de l'chantillon (250 personnes) donc on peut considrer que le sondage se ramne un tirage avec remise (une personne peut, en thorie, tre sonde plusieurs fois).

a) Quelle est la loi de X ?
b) Par quelle loi continue, plus commode pour les calculs, peut-on l'approcher ?
c) On suppose dsormais $\alpha = 51\%$. Quelle est la probabilit que le sondage donne moins de 49 % pour Truc ?
d) On voudrait que cette probailit soit infrieure 5 %. Combien de personnes, au lieu de 250, faudrait-il interroger pour cela ?