

Le théorème central limite

I. Rappel théorique

1. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

2. La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{P}(x < N \leq x + \delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \delta x$$

3. Le théorème central limite

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq N}$$

$$\mathbb{P}(a < Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a < N \leq b)$$

$$F_n(t) = \mathbb{P}(Z_n \leq t) \simeq G(t) = \mathbb{P}(N \leq t)$$

4. Calcul de l'erreur

$$|F_n(t) - G(t)| \leq \text{Erreur}$$

II. Convergence des distributions

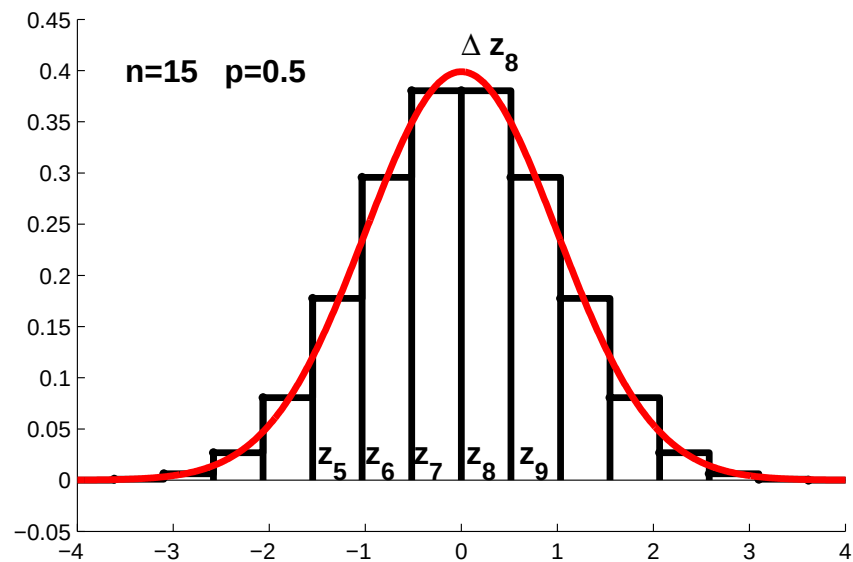
1. Densité empirique de Z_n

$$z_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \Delta z_k = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

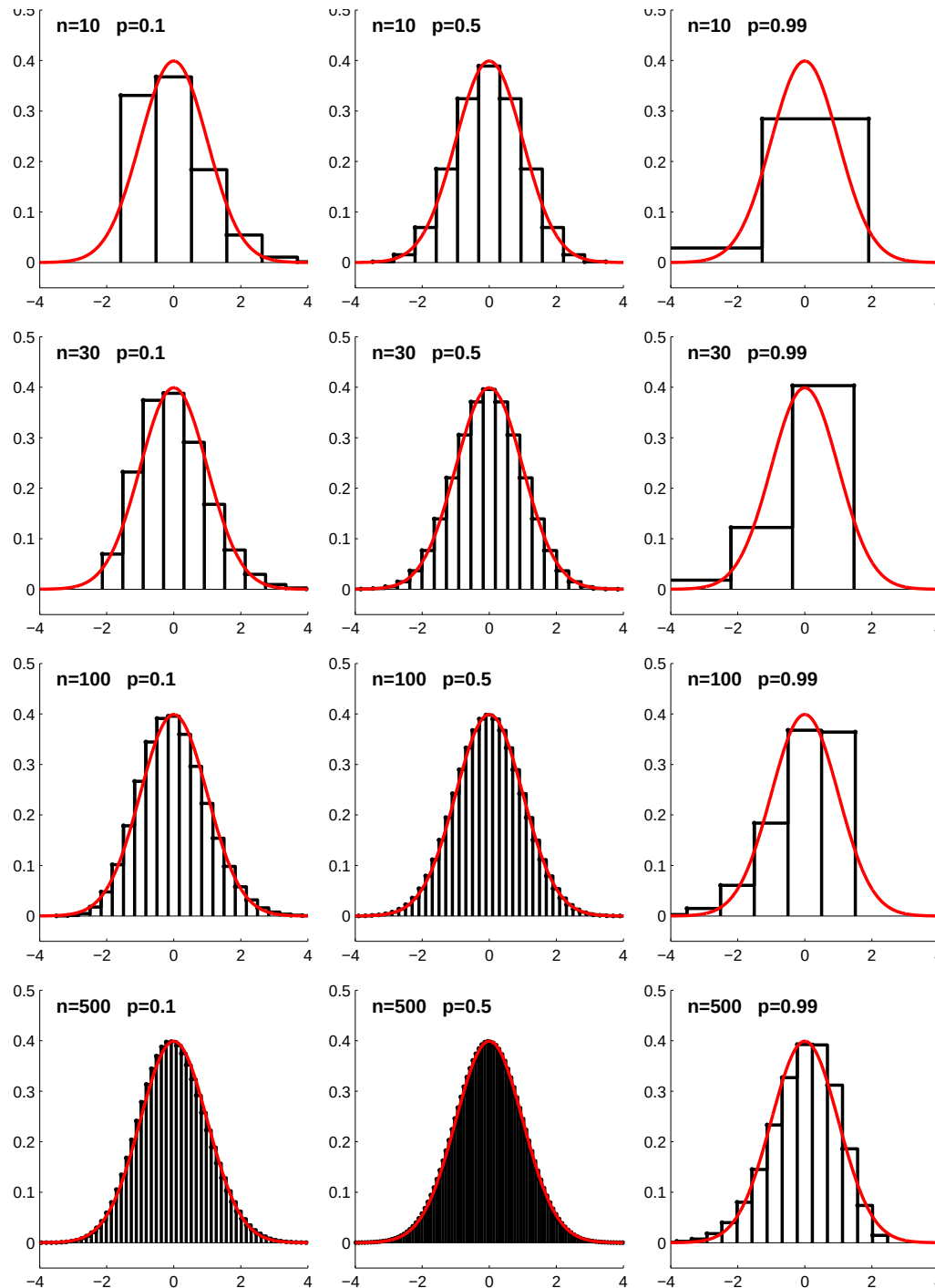
$$z_{k-\frac{1}{2}} < t \leq z_{k+\frac{1}{2}} \implies f_n(t) = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\Delta z_k}$$

$$\mathbb{P}(z_{k-\frac{1}{2}} < Z_n \leq z_{k+\frac{1}{2}}) = \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} f_n(t) dt$$

2. Graphe de la densité



Représentation graphique de la convergence



III. Calcul de l'erreur

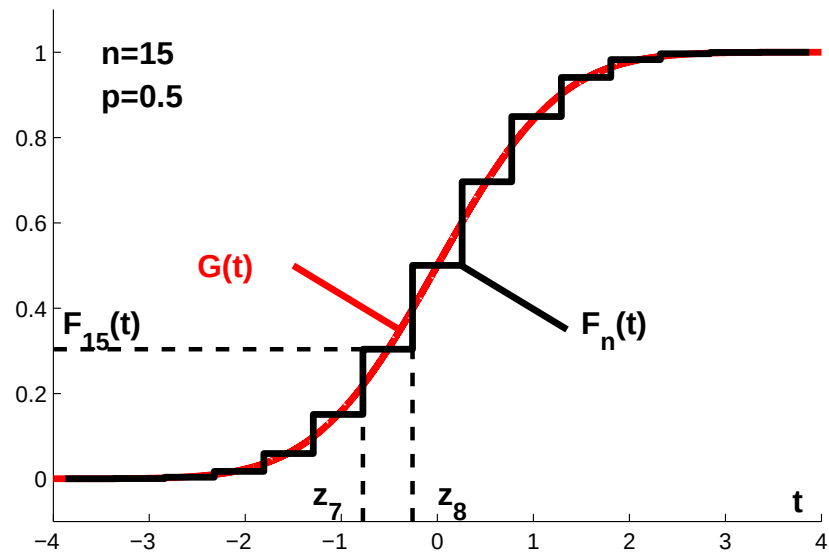
1. Fonction de répartition empirique

$$t \in [z_k, z_{k+1}[, \quad z_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$F_n(t) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

2. Comparaison des fonctions de répartition



3. Table des corrections

	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50
5	0.95	0.77	0.69	0.66	0.61	0.52	0.50	0.49
10	0.90	0.68	0.59	0.49	0.46	0.40	0.37	0.36
15	0.86	0.64	0.48	0.42	0.39	0.33	0.31	0.30
20	0.82	0.58	0.45	0.38	0.34	0.30	0.27	0.26
30	0.74	0.47	0.38	0.31	0.28	0.24	0.22	0.21
40	0.68	0.44	0.33	0.28	0.25	0.21	0.19	0.19
50	0.67	0.39	0.30	0.25	0.22	0.19	0.17	0.17
60	0.66	0.37	0.27	0.23	0.20	0.17	0.16	0.15
70	0.64	0.34	0.25	0.21	0.19	0.16	0.15	0.14
80	0.62	0.32	0.24	0.20	0.18	0.15	0.14	0.13
90	0.60	0.30	0.22	0.19	0.17	0.14	0.13	0.13
100	0.58	0.29	0.21	0.18	0.16	0.14	0.12	0.12
200	0.44	0.21	0.15	0.13	0.11	0.10	0.09	0.08
300	0.37	0.17	0.12	0.10	0.09	0.08	0.07	0.07
400	0.32	0.15	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06	0.06
500	0.29	0.13	0.10	0.08	0.07	0.06	0.06	0.05
1000	0.21	0.10	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04
2000	0.15	0.07	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03
3000	0.12	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02
4000	0.11	0.05	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02
5000	0.09	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02
10000	0.07	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01

Si $p = 0.3$ et $n = 100$, l'erreur entre les deux calculs

$$\mathbb{P}(a < \mathbf{Z}_n \leq b) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(a < N \leq b)$$

est égale à

$$\mathbf{2 \times 0.14 = 0.28}$$