UNE DÉFINITION DE MODÉRATION EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE (ACTIONS PAR UN SCHÉMA EN GROUPES CONSTANT, DIAGONALISABLE)

MARQUES SOPHIE

1. Schéma en groupes constant

On se donne Γ un groupe fini abstrait (groupe usuel) et R un anneau commutatif unitaire. On peut considérer la R-algèbre $A := Map(\Gamma, R)$ de toutes les applications de Γ dans R. On peut vérifier en outre que l'algèbre A est libre sur R, une base de A est donnée par les applications f_γ telles que $f_\gamma(\sigma) = \delta_{\gamma,\sigma}$, pour tout γ, $\sigma \in \Gamma$.
On remarque que $f_\gamma^2 = f_\gamma$, $f_\gamma f_\tau = 0$ si $\tau \neq \gamma$ et $\sum_\gamma f_\gamma = 1_A$.
On veut munir A d'une structure de coalgèbre et d'un coinverse $(A,\ \Delta,\ \epsilon,\ S)$ où :
- la comultiplication $\Delta : A \to A \otimes_R A$ définie par $\Delta(f_\rho) = \sum_{\rho=\sigma\tau}(f_\sigma \otimes f_\tau)$
- la counité $\epsilon : A \to R$ est définie par

$$\epsilon(f_\sigma) = \begin{cases} 1 & si\ \sigma = e \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- le coinverse $S : A \to A$ défini par $S(f_\sigma) = f_{\sigma^{-1}}$.

Pour cela, il suffit de vérifier la coassociativité,que l'on a une counité à gauche et à droite et un coinverse à gauche et à droite c'est à dire que les diagrammes suivants sont commutatifs :

Coassociativité :
$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A & A\otimes A \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\ A\otimes A \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$
Counité à gauche :
$$\begin{tikzcd} R\otimes A \arrow[r, "\epsilon\otimes id"] & A\otimes A \\ A \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$
Coinverse à gauche :
$$\begin{tikzcd} A & A\otimes A \arrow[l, "(S,id)"'] \\ R \arrow[u] & A \arrow[l, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

Une petite explication, on peut écrire les axiomes vérifiés par la multiplication *mult*, l'inverse *inv* et l'unité *unit* d'un groupes G dans le sens usuel sous la forme des diagrammes commutatifs suivants :

Associativité :
$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "id\times mult"] \arrow[d, "mult\times id"'] & G\times G \arrow[d, "mult"] \\ G\times G \arrow[r, "mult"] & G \end{tikzcd}$$
Unité à gauche :
$$\begin{tikzcd} \{e\}\times G \arrow[r, "unit\times id"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & G\times G \arrow[d, "mult"] \\ G \arrow[r, equal] & G \end{tikzcd}$$
Inverse à gauche :
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(inv,id)"] \arrow[d] & G\times G \arrow[d, "mult"] \\ \{e\} \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

On remarque que les deux séries de diagrammes sont les "même à inversion de flèches près". C'est ainsi que l'on définit un **schéma en groupes affine** c'est à dire c'est R-schéma affine $G := Spec(A)$ associé à une algèbre de Hopf A ou en d'autre terme tel que la R-algèbre A vérifie la deuxième série de diagramme (lemme de Yoneda). Ce qui explique la terminologie.
Dans le cas présent, $A := Map(\Gamma, R)$ est une **algèbre de Hopf** i.e. une R-algèbre muni d'une structure de coalgèbre et d'un coinverse. Le schéma en groupes $G := Spec(A)$ associé à cette algèbre de Hopf particulière est appellé un **schéma en groupes constant**.

2. Action de schémas en groupes affines

2.1. **Définition.** On rappelle, à nouveau par le lemme de Yoneda, que se donner un schéma affine X sur R est équivalent à se donner une R-algèbre B. La donnée d'une action sur un schéma en groupes affine $G := Spec(A)$ sur $X := Spec(B)$ est équivalente à la donnée de ce que l'on appelle une **structure de A-comodule d'algèbre** pour B c'est à dire une structure de R-module pour B et la donnée d'une application R-linéaire $\rho_B : B \to B \otimes_R A$ (qui donne donc à B sa structure de A-comodule) telle que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho_B"] \arrow[d, "\rho_B"'] & B\otimes_R A \arrow[d, "B\otimes\Delta"] \\ B\otimes_R A \arrow[r, "\rho_B\otimes A"] & B\otimes_R A\otimes_R A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho_B"'] & B\otimes_R R \\ B\otimes_R A \arrow[ur, "B\otimes\epsilon"] & \end{tikzcd}$$

et telle que la structure de A-comodule de B soit compatible avec la structure d'algèbre c'est à dire $\rho_B(ab) = \rho_B(a)\rho_B(b)$ pour tout a, $b \in A$ et $\rho_B(1) = 1\otimes 1$. On se rappelle qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X pour la théorie des groupes usuelle est la donnée d'une application $\mu_X : X\times G \to G$ vérifiant par les égalités suivantes :

$$\forall x\in X,\ g,\ g'\in G,\ \mu_X(\mu_X(x,g'),g) = \mu_X(x,gg') \text{ et } \mu_X(x,e) = x$$

On peut aussi exprimer ces égalités sous la forme des diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} X\times G\times G \arrow[r, "\mu_X\times id_G"] \arrow[d, "id_X\times\pi_G"'] & X\times G \arrow[d, "\mu_X"] \\ G\times X \arrow[r, "\mu_X"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X\times G \arrow[r, "\mu_X"] & X \\ X\times\{e\} \arrow[u, "Id_X\times\zeta"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

Une nouvelle fois, la première série de diagrammes définissant le A-comodule B et cette série de diagrammes sont les "mêmes à inversion de flèches prés". C'est ainsi que l'on définit une action de G sur X notée souvent (X,G), c'est à dire (X,G) est définit par un morphisme de S-schémas $\mu_X : X\times_S G \to X$ satisfaisant les diagrammes précédents.

2.2. **Cas du schéma en groupes constant.** Le lemme qui suit, montre comment à partir d'actions par des schémas en groupes constants, on se ramène aux extensions d'anneaux bien connues.

Lemma 2.1. *Pour $A := Map(\Gamma,R)$ définie comme en 1 :*

(1) *Une application $\rho_B : B \to B\otimes_R A$ (homomorphisme de R-algèbre) muni B d'une structure de A-comodule d'algèbre si et seulement si l'application $r : \Gamma\times B \to B$ donnée par $\rho(b) = \sum_\gamma r(\gamma,b)\otimes f_\gamma$ définit une action de Γ sur B par automorphismes de $R-$algèbres.*

(2) *Alors, l'anneau $C := B^A = \{b\in B, \rho_B(b) = B\otimes 1_A(b)\}$ est l'anneau B^Γ des invariants sous l'actions de Γ.*

Démonstration. (1) On veut montrer l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} (B\otimes\Delta)\rho = (\rho\otimes B)\rho \\ (B\otimes\epsilon)\rho = B\otimes 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} \forall b\in B,\ g,\ g'\in\Gamma, & r(g,r(g',b)) = r(gg',b)\ (*) \\ & r(b,e) = b(**) \end{array}\right.$$

Or, pour $b\in B$, on a :

$$(B\otimes\Delta)\rho(b) = (B\otimes\Delta)(\sum_\gamma r(\gamma,b)\otimes f_\gamma) = \sum_\gamma r(\gamma,b)\otimes\Delta(f_\gamma) = \sum_\gamma\sum_{\gamma=\sigma\tau} r(\gamma,b)\otimes f_\sigma\otimes f_\tau \ (1)$$

et

$$(\rho\otimes B)\rho(b) = (\rho\otimes B)(\sum_\beta r(\beta,b)\otimes f_\beta) = \sum_\beta \rho(r(\beta,b)\otimes f_\beta = \sum_\beta\sum_\lambda r(\lambda,r(\beta,b))\otimes f_\lambda\otimes f_\beta \ (2)$$

En prennant, le terme de la double somme de (1) correspondant à $\gamma = gg', \sigma = g$ et $\tau = g'$ i.e. $r(gg',b)\otimes f_g\otimes f'_g$ et en l'identifiant à celui lui correspondant de la somme de (2), $r(g,r(g',b))\otimes f_g\otimes f'_g$ pour tout $g,g'\in\Gamma$ et $b\in B$, en se rappelant que les $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ forme une base de A, on obtient la première équivalence. En ce qui concerne la seconde, en utilisant la définition de la counité ϵ, pour $b\in B$, on obtient :

$$(B\otimes\epsilon)\rho(b) = (B\otimes\epsilon)(\sum_\gamma r(\gamma,b)\otimes f_\gamma) = \sum_\gamma r(\gamma,b)\otimes\epsilon(f_\gamma) = r(e,b)\otimes 1$$

Ce qui établit la deuxième partie de l'équivalence.

Enfin, il est clair que l'action de Γ sur B se fait par automorphisme de $k-$algèbre.

(2) On rappelle que $B^\Gamma := \{b \in B,\ r(\gamma, b) = b,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$ et $B^A := \{b \in B,\ \rho_B(b) = b \otimes 1_A\}$.
Pour montrer que ces deux ensembles sont égaux, il suffit pour cela d'écrire $\rho(b)$ pour $b \in B$.

$$\rho(b) = \sum_\gamma r(\gamma, b) \otimes f_\gamma = b \otimes 1_A = b \otimes \sum_\gamma f_\gamma = \sum_\gamma b \otimes f_\gamma$$

On obtient alors le résultat par le même type d'identifications que celles faites précédemment.

□

2.3. **Action modérée de schémas affines.** On dira qu'une action d'une schéma affine $X := Spec(B)$ sur $G := Spec(A)$ est **modérée** si et seulement si il existe une application de A-comodules $\alpha : A \to B$ en d'autre termes une application R-linéaire telle que $\rho_B \circ \alpha = (\alpha \otimes A) \circ \Delta$ qui est unitaire c'est à dire que $\alpha(1_A) = 1_B$.

Remarque 2.2. *On notera que cette application* ***ne définit pas*** *une application de S-schémas affines de X vers G.*

3. Action modérée par un schéma en groupes constant et surjectivité de l'application trace

3.1. **Caractérisation par la surjectivité de la trace.** On se donne un schéma en groupes $G := Spec(A)$ constant attaché à Γ défini comme en 1,$X := Spec(B)$ un R-schéma affine et une action (X, G). En reprenant les notation du lemme 2.1, on appelle t_Γ l'élément trace $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ définie par :

$$\begin{array}{cccl} t_\Gamma : & B & \to & C := B^\Gamma \\ & b & \mapsto & t_\Gamma.b := \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma', b) \end{array}$$

Cette application est bien définie en effet, clairement $t_\Gamma.b \in B$, pour tout $b \in B$ et de plus, pour tout $b \in B$ et $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\begin{array}{rcl} r(\gamma, t_\Gamma.b) & = & r(\gamma, \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma', b)) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma, r(\gamma', b)) \text{ (car l'action se fait par automorphisme de } R- \text{ algèbre)} \\ & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma e, r(\gamma', b)) \\ & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(e, r(\gamma^{-1}\gamma', b)) \text{ par (*) du 0.2} \\ & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma^{-1}\gamma', b) \text{ par (**) du 0.2} \\ & = & tr.b \text{ puisque la multiplication par } \gamma^{-1} \text{ définie une bijection du groupe } \Gamma \text{ sur lui-même} \end{array}$$

Lemma 3.1. (1) *L'application t_Γ est surjective si et seulement si il existe $b \in B$ avec $t_\Gamma(b) = 1_C$*

(2) *α est une application de $A-$comodule si et seulement si $\forall \gamma, \sigma \in \Gamma,\ \alpha(f_{\gamma\sigma^{-1}}) = \sigma.\alpha(f_\gamma) = r(\sigma, \alpha(f_\gamma))$.*

Démonstration. (1) Le sens direct est clair. Montrons donc la réciproque. Supposons qu'il existe $b \in B$ avec $t_\Gamma(b) = 1_C$. Il s'agit de montrer que t_Γ est surjective. Soit $c \in C$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $r(\gamma, c) = c$ (□).

$$\begin{array}{rcl} \text{Ainsi } c = c1_C = ct_\Gamma(b) = c\sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma', b) & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} cr(\gamma', b) \\ & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma, c) r(\gamma', b) \text{ (par (□))} \\ & = & \sum_{\gamma' \in \Gamma} r(\gamma', bc) \text{ (car l'action se fait par automorphisme de } R- \text{ algèbre)} \\ & = & tr(bc)\ cqfd \end{array}$$

(2) α est une application de comodule si et seulement si pour tout $\theta \in \Gamma$

$$\begin{array}{rl} & \rho \circ \alpha(f_\theta) = (\alpha \otimes B)\Delta(f_\theta) \\ \Leftrightarrow & \rho(\alpha(f_\theta)) = (\alpha \otimes B)(\sum_{ab=\theta} f_a \otimes f_b) \\ \Leftrightarrow & \sum_{\lambda \in \Gamma} r(\lambda, \alpha(f_\theta)) \otimes f_\lambda = \sum_{ab=\theta} \alpha(f_a) \otimes f_b \end{array}$$

Comme $(f_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ est une base de A, en indentifiant les termes des deux sommes de la dernière égalité, pour $\lambda = b = \sigma$, $\theta = \gamma$ on a $a = \gamma\sigma^{-1}$, on obtient l'équivalence voulue.

□

Lemma 3.2. *L'action $(X, G) = (Spec(A), Spec(B))$ est modérée si et seulement si il existe $b \in B$ avec $t_\Gamma(b) = 1_C$ i.e l'application t_Γ est surjective.*

Démonstration.
Supposons que l'action $(X, G) = (Spec(A), Spec(B))$ est modérée c'est à dire qu'il existe $\alpha : A \to B$ une application de A-comodule unitaire.
Ainsi

$$\begin{array}{rcl} 1_B & = & \alpha(1_A) \text{ puisque } \alpha \text{ est unitaire} \\ & = & \alpha(\sum_\gamma f_\gamma) \text{ car } \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma = 1_A \\ & = & \\ & = & \sum_\gamma \alpha(f_\gamma) \text{ car } \alpha \text{ application de commodule} \\ & = & \sum_\gamma \gamma^{-1}\alpha(f_1)(\text{ par le fait 2 voir plus haut}) \\ & = & \sum_\gamma \gamma\alpha(f_1)) \text{ car } \begin{array}{ccc} \Gamma & \to & \Gamma \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1} \end{array} \text{ est une bijection du groupe } \Gamma \\ & = & tr(\alpha(f_1)) \end{array}$$

Ainsi, en prenant $b = \alpha(f_1)$, on a $t_\Gamma(b) = 1_C$. Pour la réciproque, supposons qu'il existe $b \in B$ avec $t_\Gamma(b) = 1_C$. Posons $\alpha(f_1) := b$ et donc pour $\gamma \in \Gamma$, $\alpha(f_\gamma) = \gamma^{-1}b$, grâce au lemme précédent on obtient la réciproque. □

Remarque 3.3. *Si l'on considère un groupe abstrait Γ agissant sur un anneau d'entier B par automorphismes et si C est l'anneau des invariants de B par l'action de Γ la théorie des nombres classique dit que la Γ extension B/C est modérée si et seulement si pour tout $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B, l'ordre du groupe d'inertie est premier à la caractéristique du corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ si et seulement si la trace est surjective. On peut aussi définir le groupe d'inertie d'une action de schéma en groupes et montrer que dans le cas d'un groupe constant, le groupe d'inertie en un idéal premier $\mathfrak{p}$ correspond au schéma en groupes constant associé au groupe d'inertie abstrait de la Γ extension des corps résiduel. On montre alors que dans le cas du groupe constant une action est modérée si et seulement si la caractéristique du corps résiduel et l'ordre du groupe d'inertie abstrait sont première entre elles. On retrouve donc dans le cas du schéma en groupes constant une des caractérisations des actions modérées par la surjectivité de la trace et par l'inertie. Ce qui explique la terminologie.*

3.2. **Example.** Soit $B = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ et $C_2 =< g >$ où C_2 est le groupe cyclique d'ordre 2. Si $G = Spec(A)$ est un schéma en groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associé à C_2 alors $A = Map(C_2, \mathbb{Z})$. Notons x la classe de X dans B
Ce schéma en groupe agit sur B, cette action est donnée par l'application de $\mathbb{Z}$-linéaire donnant à B sa structure de A-module :

$$\begin{array}{rcl} B \times A & \to & B \\ (x,\ g) & \mapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & si\ g \text{ trivial} \\ -x & si\ g \text{ non trivial} \end{array} \right. \end{array}$$

On peut montrer que $B^A = B^\Gamma = \mathbb{Z}$ (on utilise ici le fait que B est intègre puisque $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ et de caractéristique nulle) et que $1_\mathbb{Z}$ n'a pas d'antécédent par l'application trace donc l'action n'est pas modérée.

4. Dual d'un schéma en groupe constant : schémas en groupe diagonalisables

Soit M un groupe abélien et $R[M]$ un algèbre en groupe (i.e. un module libre ayant pour base les éléments de M et munit une multiplication induite par celle sur M). On fait de celle-ci une algèbre de Hopf $(A,\ \Delta,\ \epsilon,\ S)$ en posant $\Delta(m) = m \otimes m$, $\epsilon(m) = 1$, $S(m) = m^{-1}$. Le schéma en groupes correspondant G est appelé **schéma en groupes diagonalisable**.

Lemma 4.1. *La donnée d'une action de G sur $X = Spec\ B$ est équivalente à la donnée d'une graduation d'algèbre pour $B = \oplus_{m \in M} B_m$ i.e. telle que $B_{m'}B_m \subseteq B_{m+m'}$.*

Démonstration. Comme on l'a vu en 1.3.1 se donner une action revient à se donner une application $R-$linéaire $\rho_B : B \to B \otimes_R R[M] = \oplus_{m \in M} B \otimes_R mR$ qui donne à B une structure de A-comodule d'algèbre. Dans le cas présent, la donnée d'une application ρ_B $R-$linéaire de B dans B est équivalente à la donnée d'application R-linéaire de B dans lui-même $(\rho_m)_{m \in M}$ définies de manière unique (M base de $R[M]$) vérifiant pour tout $x \in B$,

$$\rho(x) = \sum_{m \in M} \rho_m(x) \otimes m$$

Le fait que ρ_B définisse une structure de A-comodule d'algèbre pour B ceci se traduit sur les $(\rho_m)_{m\in M}$ par les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \rho_{m'} \circ \rho_m & = & \delta_{m,m'}\rho_m \\ \sum\limits_{m\in M} \rho_m(B) & = & B \end{array}$$

en effet, on a

$$\begin{array}{ll} & \left\{ \begin{array}{rcl} (B\otimes\Delta)\rho & = & (\rho\otimes A)\rho_B \\ (B\otimes\epsilon)\rho & = & B\otimes 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \forall b\in B, \left\{ \begin{array}{rcl} (B\otimes\Delta)\rho(b) & = & (\rho\otimes A)\rho(b) \\ (B\otimes\epsilon)\rho(b) & = & b\otimes 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \forall b\in B, \left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{m\in M} \rho_m(b)\otimes m\otimes m & = & \sum\limits_{m\in M} \rho_{m'}(\rho_m(b))\otimes m'\otimes m \\ \sum\limits_{m\in M} \rho_m(b)\otimes 1 & = & b\otimes 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \text{Par identification } (M \text{ base de } R[M]) : \forall b\in B, \left\{ \begin{array}{rcl} \rho_m(b)\delta_{m,m'} & = & \rho_{m'}(\rho_m(b)) \\ \sum\limits_{m',\ m\in M} \rho_m(b) & = & b \end{array} \right. \end{array}$$

Ce qui montre que $B = \oplus_{m\in M} B_m$ où l'on a posé $B_m = \rho_m(B)$. Comme $B\otimes_R A$ peut être muni d'une structure d'algèbre, la graduation obtenue est une graduation d'algèbre. □

Proposition 4.2. *Supposons que M est un groupe abélien et soit $G = Spec\ R[M]$ le schéma en groupes diagonalisable. L'action (X,H) est modérée. En d'autres termes,* ***l'action d'un groupe diagonalisable sur un schéma en groupes affine est modérée****.*

Démonstration. On cherche à montrer que $(X,\ G)$ est modérée, i.e. qu'il existe $\alpha : R[M] \to B$ une application de A-comodule telle que $\alpha(1_R[M]) = 1_B$.

Construction de α : Comme $1_B \in \oplus_{m\in M} B_m$, 1_B s'écrire d'une manière unique sous la forme $1_B = \sum_{m\in M} e_m$ où $e_m \in B_m$.

On pose alors $\alpha(m) := e_m$ et pour tout $a \in R[M]$, $a = \sum_{m\in M} r_m m$ où $r_m \in R$, pour tout $m\in M$ et $\alpha(a) = \sum_{m\in M} r_m e_m$.

On a bien $\alpha(1_{R[M]}) == \alpha(1_R.0_M) = e_0 = 1_B$.

Reste à vérifier que α est une application de comodule. En effet, pour tout $m \in M$,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha\otimes 1)\circ\Delta(m) & = & (\alpha\otimes 1)(m\otimes m) \\ & = & e_m\otimes m \\ & = & e_m \otimes \sum_{m\in M}\epsilon((e_m)_0)(e_m)_1 \\ & = & \sum_{m\in M}\epsilon((e_m)_0)e_m\otimes(e_m)_1 \\ & = & \sum_{m\in M}(e_m)_0\otimes(e_m)_1 \\ & = & \rho(e_m) \\ & = & \rho\otimes\alpha(m) \end{array}$$

Donc l'action $(X,\ H)$ est modérée □

(MARQUES) Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France et Università degli studi di Padova, Dipartimento di Matematica, Via Trieste 63, 35121, Padova, Italia dans le cadre de ALGANT.DOC.

E-mail address: Sophie.Marques@math.u-bordeaux1.fr (http://www.math.u-bordeaux1.fr/~smarques)