SOUTENANCE DE THÈSE

RAMIFICATION MODÉRÉE POUR DES ACTIONS DE SCHÉMAS EN GROUPES AFFINES ET CHAMPS QUOTIENTS

Par Sophie, MARQUES

Directeurs de recherche : Boas Erez (Bordeaux) - Marco Garuti (Padoue)

Rapporteurs : Ted CHINBURG (Pennsylvanie) - Angelo VISTOLI (Pise)

Le 15 juillet 2013, à l'IMB devant la commission d'examen composée de :

Prof. CHIARELLOTTO, Bruno	**Università degli studi di Padova**	
Prof. CHINBURG, Ted	**University of Pensilvania**	**Rapporteur**
Prof. DÈBES, Pierre	**Université Lille 1**	
Prof. EREZ, Boas	**Université Bordeaux 1**	**Directeur**
Prof. GARUTI, Marco	**Università degli studi di Padova**	**Co-directeur**
Prof. GILLIBERT, Jean	**Université Bordeaux 1**	

Décomposition des idéaux sur un corps de nombres

Soit K un corps de nombres. Supposons que $K/\mathbb{Q}$ est une extension de Galois. Notons Γ son groupe de Galois et par $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K.

Décomposition des entiers premiers dans K (Dedekind (1831 -1916)-Hilbert (1862-1943)).

Soit p un entier premier, nous avons la décomposition

$$p\mathcal{O}_K = (\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r)^{e_p}$$

où $\mathfrak{p}_i$ sont les **idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ au dessus de** p et e_p est **l'indice de ramification de** p.

Groupe d'inertie et indice de ramification

Définition (Groupes d'inertie)

Pour un idéal premier non-nul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, nous définissons le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$ comme étant le sous-groupe normal de Γ

$$\Gamma_{\mathfrak{p}} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \text{ et } \gamma.x = x, \text{ pour tout } x \in k(\mathfrak{p})\}$$

où $k(\mathfrak{p})$ est le corps résiduel en $\mathfrak{p}$.

Groupe d'inertie et indice de ramification

Pour tout i, $e_p = |\Gamma_{\mathfrak{p}_i}|$ où $|\Gamma_{\mathfrak{p}_i}|$ est l'ordre du groupe d'inertie en $\mathfrak{p}_i$.

Ramification

Définition (Ramification)

Un entier premier p est dit :

- **ramifié** si $e_p > 1$,
- **modérément ramifié** si $e_p > 1$ et $p \not| e_p$
- **non-ramifié** si $e_p = 1$.

L'extension $K/\mathbb{Q}$ est dite **modérément ramifiée** si et seulement si pour tout entier premier p, p est modérément ramifié.

Surjectivité de la trace

Définition (Anneau des invariants et application trace)

L'**anneau des invariants** est l'ensemble

$$\mathcal{O}_K^\Gamma := \{b \in \mathcal{O}_K | \gamma.b = b,\ \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

L'**application trace** est définie par

$$\begin{array}{rccc} tr: & \mathcal{O}_K & \to & \mathcal{O}_K^\Gamma \\ & b & \mapsto & \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.b. \end{array}$$

Caractérisation de la modération avec la surjectivité de la trace

L'extension $K/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée si et seulement si tr est surjective.

Decomposition de $\mathcal{O}_K$ suivant les groupes d'inertie

Lemme (Serre)

Notons $\mathbb{Z}_{(p)}^{sh}$ l'hensélianisé strict de $\mathbb{Z}$ en l'idéal engendré par un entier premier p. Nous avons :

$$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}^{sh} \simeq \prod_i \mathcal{O}_{K_i}$$

où K_i est une extension finie de $\mathbb{Q}_{(p)}^{sh}$ tel que

$$Gal(K_i/\mathbb{Q}_{(p)}^{sh}) \simeq \Gamma_{\mathfrak{p}}$$

pour tout i et tout idéal premier $\mathfrak{p}$ au dessus de p, où $\mathbb{Q}_{(p)}^{sh}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}_{(p)}^{sh}$.

Ramification pour les Γ-objets

Soit Γ un groupe fini.

Définition (Γ-objects)

Un Γ-**objet** est un anneau commutatif B avec une action de Γ.

Définition (Objet galoisien et object modéré)

- Nous disons qu'un Γ-**objet** B **est galoisien**, si pour tout idéal premier non-nul $\mathfrak{p}$ de B, le groupe d'inertie $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ est trivial.
- Nous disons qu'un Γ-**objet** B **est modéré**, si pour tout idéal premier non-nul $\mathfrak{p}$ de B, $(Char(k(\mathfrak{p})), |\Gamma_{\mathfrak{p}}|) = 1$.

Des Γ-objets aux actions de schémas en groupes

Lemme

Supposons que $G := Spec(A)$ soit le schéma en groupes constant associé à Γ un groupe fini abstrait ainsi, $A = Map(\Gamma, R)$ est l'ensemble des applications de Γ dans R.

1. La donnée d'une action de G sur X est équivalente à la donnée de l'action de Γ sur B.
2. L'anneau des invariants $B^A = \{b \in B | \rho_B(b) = b \otimes 1\}$ est égal à l'anneau des invariants $B^\Gamma = \{b \in B | \gamma.b = b, \ \forall \gamma \in \Gamma\}$.

Groupes d'inertie et groupes des automorphismes

Définition (Groupes d'inertie de (X, G) et groupes des automorphismes de $[X/G]$)

1. Pour ζ un T-point de X où T est un S-schéma, le **groupe d'inertie en ζ pour l'action**, noté $I_G(\zeta)$, est défini comme le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} I_G(\zeta) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "\Delta\circ\zeta"] \\ X \times_S G \arrow[r, "(\mu_X, p_1)"'] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

où p_1 est la première projection et $\Delta : X \to X \times_S X$ est l'application diagonale.
Pour toute T-algèbre T',

$$I_G(\zeta)(T') = \{g \in G(T') | g.\zeta_{T'} = \zeta_{T'}\}$$

où $\zeta_{T'} : Spec(T') \to Spec(T) \to X$.
Pour $\mathfrak{p} \in X$, $\zeta : Spec(k(\mathfrak{p})) \to X$ et nous notons le groupe d'inertie $I_G(\mathfrak{p})$ au lieu de $I_G(\zeta)$.

2. Le **groupe des automorphismes de** $\bar{\zeta} : T \to X \to [X/G]$ est défini comme le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \underline{Aut}_{[X/G]}(\bar{\zeta}) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "\Delta\circ\bar{\zeta}"] \\ {[X/G]} \arrow[r, "\Delta"'] & {[X/G] \times_S [X/G]} \end{tikzcd}$$

On a $I_G(\zeta) \simeq \underline{Aut}_{[X/G]}(\bar{\zeta})$.

Lien avec les groupes d'inertie définis pour les Γ-objets

Lemme

Supposons que G soit le schéma en groupes constant associé à un groupe fini abstrait Γ.
Pour tout $\mathfrak{p} \in X$, le groupe d'inertie $I_G(\mathfrak{p})$ en $\mathfrak{p}$ est le schéma en groupes constant associé à $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ (le groupe d'inertie abstrait en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ pour l'action de Γ sur B).

Actions libres et torseurs

Définition (Actions libres)

L'action (X, G) est dite **libre** si l'application de Galois est un monomorphisme.

Définition (Torseurs)

Soit U un schéma. Un U-schéma Z est un **torseur** sur U sous l'action de G, si :

1. Z est fidèlement plat (et quasi compact) sur U.
2. L'application de Galois est un isomorphisme.

Torseurs et actions libres

Supposons que G soit un schéma en groupes fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'action (X, G) est libre.
2. Le schéma X est G-torseur sur Y.

Modération au sens [CEPT96]

Définition (Actions modérées)

Nous disons qu'une **action** (X, G) **est modérée** si il existe un morphisme unitaire de A-comodules $\alpha : A \to B$, i.e. $\alpha(1_A) = 1_B$, un tel α est appelé **intégrale totale**.

La R-algèbre A peut être vue comme un A comodule via la comultiplication $\Delta : A \to A \otimes_R A$. Nous rappelons qu'un morphisme de A-comodules $\alpha : A \to B$ est une application R-linéaire telle que $\Delta \circ \alpha = (\alpha \otimes Id_B) \circ \rho_B$.

T. Chinburg, B. Erez, G. Pappas, and M. J. Taylor.
Tame actions of group schemes : integrals and slices.
Duke Math. J., 82(2) :269–308, 1996.

Modération au sens [AOV08]

Définition (Champs quotients modérés)

Nous disons que **le champ quotient** $[X/G]$ **est modéré** si le foncteur des invariants

$$(-)^A : {}_B\mathcal{M}^A \to {}_{B^A}\mathcal{M}$$

est exact.

- ${}_B\mathcal{M}^A$ est la catégorie des A-comodules à droite qui sont aussi des B-modules à gauche dont les structures sont compatibles
- ${}_{B^A}\mathcal{M}$ est la catégorie des B^A-modules à gauche.

Définition géométrique

Le champ quotient $[X/G]$ est modéré si et seulement si le foncteur

$$\rho_* : Qcoh([X/G]) \to Qcoh(Y)$$

est exact.

On a $Qcoh([X/G]) \simeq Qcoh^G(X)$.

D. Abramovich, M. Olsson, and A. Vistoli.
Tame stacks in positive characteristic.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 58(4) :1057–1091, 2008.

Quelles sont les relations entre ces deux notions de modération ?

Théorème (M., 2011)

Si l'action est modérée alors le champ quotient est modéré.

Théorème (M., 2012)

Supposons que G soit fini sur S et B plat sur B^A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'action (X, G) est modérée.
2. Le champ quotient $[X/G]$ est modéré.

Schémas en groupes linéairement réductifs

Définition (Schémas en groupes linéairement réductifs)

Supposons que G soit fini sur S. Considérons le champ classifiant $[S/G]$ (i.e. le champ quotient associé à l'action triviale de G sur S). Nous disons que G est **linéairement réductif**, si le champ classifiant $[S/G]$ est modéré.

Lemme

Si k est un corps et G est fini sur $Spec(k)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le schéma en groupes G est linéairement réductif.
2. Toute représentation de G est une somme directe de représentations irréductibles.

Classification des schémas en groupes linéairement réductifs

Supposons que G soit fini sur S. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le schéma en groupes G est linéairement réductif.
2. G est localement isomorphe, pour la topologie fppf, au produit semi-direct $\Gamma \ltimes \Delta$ où Γ est un schéma en groupes constant modéré (i.e. son ordre est premier à toutes les caractéristiques résiduelles) et Δ est diagonalisable.

Comment se traduit la modération pour les Γ-objets dans notre contexte géométrique ?

Lemma

Supposons que G soit le schéma en groupes constant sur S associé à Γ un groupe fini abstrait. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'ordre du groupe d'inertie abstrait $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ pour l'action de Γ sur B est premier à la caractéristique du corps résiduel $k(\mathfrak{p})$.
2. Le groupe d'inertie $I_G(\mathfrak{p})$ de G en $\mathfrak{p}$ est linéairement réductif.

Est-ce que la ramification peut se définir via les groupes d'inertie comme dans le cas classique ?

Théorème (Demazure-Gabriel, 1970)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'action est libre.
2. Les groupes d'inertie $I_G(\mathfrak{p})$ sont triviaux, pour tout $\mathfrak{p} \in X$.

Théorème (AOV, 2008)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le champ quotient $[X/G]$ est modéré.
2. Les groupes d'inertie aux points géométriques sont linéairement réductifs.
3. Les groupes d'inertie $I_G(\mathfrak{p})$ sont linéairement réductifs, pour tout $\mathfrak{p} \in X$.

Calcul de groupes d'inertie

Exemple de champ modéré :

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.
Prenons $\alpha_p \rtimes \mu_n = Spec(A)$ où $A := k[u,v]/(u^n - 1, v^p)$ avec $(n,p) = 1$.
La comultiplication est donnée par

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & A & \to & A \otimes_k A \\ & u & \mapsto & u \otimes u \\ & v & \mapsto & u \otimes v + v \otimes 1 \end{array}.$$

Considérons l'action $(\mathbb{A}^1_k, \alpha_p \rtimes \mu_n)$ définie par l'application de comodule

$$\begin{array}{rccc} \rho_{k[x]}: & k[x] & \to & k[x] \otimes_k A \\ & x & \mapsto & x \otimes \bar{u} + 1 \otimes \bar{v} \end{array}$$

Le groupe d'inertie est μ_p en l'origine et trivial en tout autre point géométrique.
Donc le champ quotient associé à cette action est modéré.

Existe t-il une caractérisation de la modération équivalente à la surjectivité de la trace ?

Théorème (CEPT, 1996)

Supposons que G soit un schéma en groupes constant associé à un groupe fini abstrait Γ. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'action (X, G) est modérée.
2. L'application trace tr est surjective.

Lemme (Doi, 1990)

Si l'action est modérée, alors il existe un projecteur R-linéaire appelé **opérateur de Reynolds** $pr_M : M \to M^A$, pour tout $M \in {}_B\mathcal{M}^A$.

Proposition

Supposons que G soit fini sur S et B soit plat sur B^A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le champ quotient est modéré.
2. L'action est modérée.
3. Il existe un opérateur de Reynolds $pr_M : M \to M^A$, pour tout $M \in {}_B\mathcal{M}^A$.

Calcul de la trace

Exemple d'action non modérée

Soit $B = \mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$ et $C_2 = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre 2 et soit G un schéma en groupes constant associé à C_2 sur $\mathbb{Z}$. Notons x la classe de X dans B. L'action (X, G) est induite par l'action (B, Γ)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times B & \to & B \\ (g, x) & \mapsto & r(g,x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } g \text{ est trivial} \\ -x & \text{si } g \text{ est non trivial.} \end{array} \right. \end{array}$$

Nous avons que $B^A = B^\Gamma = \mathbb{Z}$ et l'application trace

$$t_{C_2} : \begin{array}{ccc} B & \to & \mathbb{Z} \\ \alpha_1 + \alpha_2 x & \mapsto & 2\alpha_1. \end{array}$$

Mais alors, $1_\mathbb{Z}$ n'a pas d'antécédent par tr et l'action n'est pas modérée.

Définition des Slices (CEPT, 1996)

Définition

L'action (X, G) admet des Slices étales (resp. fppf) si pour tout $\mathfrak{q} \in Y$, il existe :

1. un **voisinage étale (resp. fppf)** $Y' \to Y$ de $\mathfrak{q}$;
2. un **sous-groupe fermé** $G_{\mathfrak{q}}$ de $G_{Y'}$ tel que ${G_{\mathfrak{q}}}_{k(\mathfrak{p})} \simeq I_G(\mathfrak{p})$, pour un $\mathfrak{p} \in X$ au dessus de $\mathfrak{q}$;
3. a Y'**-schéma** Z **avec une** $G_{\mathfrak{q}}$**-action** telle que $Y' \simeq Z/G_{\mathfrak{q}}$
4. et l'action $(X \times_Y Y', G_{Y'})$ est induite par $(Z, G_{\mathfrak{q}})$. (i.e. il existe un isomorphisme $G_{Y'}$-équivariant
$$X \times_Y Y' \simeq (Z \times_{Y'} G_{Y'})/G_{\mathfrak{q}}$$
où $G_{Y'}$ agit sur $(Z \times_{Y'} G_{Y'})/G_{\mathfrak{q}}$ via la composante $G_{Y'}$.)

Le sous-groupe $G_{\mathfrak{q}}$ est appelé **groupe du slice en** $\mathfrak{q}$.

Slices pour les Γ-objets (cas constant)

Lemme (Raynaud, 1970)

Soit B un anneau commutatif avec une action de Γ où Γ est un groupe fini abstrait. Notons $C := B^A$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de C et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B au dessus de $\mathfrak{q}$. Il existe un isomorphisme Γ-équivariant

$$\begin{array}{cccc} \phi : & B \otimes_C {C_\mathfrak{q}}^{sh} & \to & (B_\mathfrak{p} \otimes_C Map(\Gamma, {C_\mathfrak{q}}^{sh}))^{\Gamma_{\mathbf{o}}(\mathfrak{p})} \\ & b & \mapsto & u : \gamma \mapsto (\gamma^{-1} b)_\mathfrak{p} \end{array}$$

où Γ opère sur $(Map(\Gamma, {C_\mathfrak{q}}^{sh}) \otimes_C B_\mathfrak{p})^{\Gamma_{\mathbf{o}}(\mathfrak{p})}$ seulement via son action naturelle sur $Map(\Gamma, {C_\mathfrak{q}}^{sh})$ et seulement à gauche sur $B \otimes_C {C_\mathfrak{q}}^{sh}$.
De plus, nous avons

$$C \simeq B_\mathfrak{p}^{\Gamma_{\mathbf{o}}(\mathfrak{p})}$$

Slices pour les actions libres

Théorème (M., 2012)

Supposons que G soit fini sur S. Soit $\mathfrak{q} \in Y$ et $\mathfrak{p} \in X$ au dessus de $\mathfrak{q}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$ est trivial.
2. Il existe un voisinage fppf $Y' \to Y$ de $\mathfrak{q}$ tel que l'action $(X \times_Y Y', G_{Y'})$ soit libre, ainsi $X \times_Y Y'$ est un $G_{Y'}$-torseur sur Y'.
3. Il existe un voisinage fppf $Y'' \to Y$ de $\mathfrak{q}$ et un schéma Z sur Y'' tel que l'action $(X \times_Y Y'', G_{Y''})$ est induite par l'action (Z, e) où e est le schéma en groupes trivial.

Existence de *slices* pour des actions de schémas en groupes commutatifs finis

Théorème (M., 2013)

Supposons que G soit commutatif et fini sur S. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le champ quotient $[X/G]$ est modéré.
2. L'action admet un slice fppf en tout $\mathfrak{q} \in Y$ tel que le groupe du slice en $\mathfrak{q}$ soit linéairement réductif.

Existence de *slices* pour des actions de schémas en groupes commutatifs finis

Étapes principales de la preuve

Théorème (M., 2012)

Soit $\mathfrak{p}$ un point de S, G un schéma en groupes fini et plat sur S et H_0 un sous-schéma en groupes linéairement réductif fermé de $G_{k(\mathfrak{p})}$ sur $Spec(k(\mathfrak{p}))$. Alors,

1. Il existe un voisinage fppf $U \to S$ de $\mathfrak{p}$,
2. un sous-schéma en groupes plat, linéairement réductif fermé H de G_U sur U tel que $H_{k(\mathfrak{q})} \simeq H_{0\,k(\mathfrak{q})}$.

Théorème (M., 2012)

Supposons que G soit commutatif et fini sur S. Pour tout $\mathfrak{p} \in X$, en notant $\mathfrak{q} \in Y$ son image via le morphisme $\pi : X \to Y$. Si le champ quotient $[X/G]$ est modéré, alors

1. Il existe un voisinage fppf $Y' \to Y$ de $\mathfrak{q}$,
2. il existe un sous-groupe $G_{\mathfrak{p}}$ de $G_{Y'}$ sur Y' relevant le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$,
3. le schéma $(X \times_Y Y')/G_{\mathfrak{p}}$ est un $G_{\mathfrak{p}}$-torseur sur Y'.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION