

KPOGNON Kodjo
UBERA Chloé
MARQUES Sophie

Chargée des TER : Mlle CADORET

TER
« Le théorème de Riemman Roch »
Théorie de la valuation et courbes



Master Mathématique première année

Mars-Mai 2008

Table des matières

Table des notations	3
Introduction	4
1 Théorie de la valuation	5
1.1 Théorie algébrique	5
1.1.1 Anneau de valuation	5
1.1.2 Valuation discrète	9
1.1.3 Places	10
1.2 Le corps des fonctions rationnelles	14
1.3 Indépendance des valuations	18
1.4 Lien avec la géométrie	21
2 Le théorème de Riemann Roch	27
2.1 Les diviseurs	27
2.2 Etude de $\mathcal{L}(A)$ et de sa dimension	30
2.2.1 Définition	30
2.2.2 Propriétés de $\mathcal{L}(A)$	31
2.2.3 Dimension de $\mathcal{L}(A)$ et majoration	34
2.3 Genre d'un corps de fonction et théorème de Riemann	38
2.4 Le théorème de Riemann Roch	40
2.4.1 Index de spécialité et répartition	40
2.4.2 Les différentielles de Weil	42
2.4.3 Démonstration du théorème de Riemann Roch	47
3 Conséquences du théorème de Riemann-Roch	51
3.1 Quelques conséquences immédiates	51
3.2 Caractérisation du genre	52
3.3 Caractérisation du corps rationnel	53
3.4 Théorème de Clifford	54
3.5 Lacunes en une place	55
Conclusion	56
Index	58
Bibliographie	58
Biographies	59

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\mathcal{O}$	anneau de valuation
$\mathcal{O}^*$	groupe des unités
$\tilde{K}$	corps des constantes
$v : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$	valuation discrète
P	place
$\mathcal{O}_P$	anneau de valuation à la place P
$\mathbb{P}_F$	ensemble des places de F/K
$\kappa := \begin{cases} x & \mapsto x(P) \\ F & \rightarrow \mathbb{F}_P \cup \{\infty\} \end{cases}$	application résiduelle
$\mathbb{F}_P = \frac{\mathcal{O}_P}{P}$	corps résiduel
$\deg P = [\mathbb{F}_P : K]$	degré de P
D_F	groupe des diviseurs
D	diviseur
$\text{supp } D$	support des diviseur
D_+	ensemble des diviseurs positifs
$\deg D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D) \deg P$	degré d'un diviseur
$(x)_0$	diviseur des zéros
$(x)_\infty$	diviseur des pôles
(x)	diviseur principal
P_F	groupe des diviseur principaux de F/K
$C_F = \frac{D_F}{P_F}$	groupe des classes de diviseurs
$\mathcal{W}_{F/K}$	classe des diviseurs canoniques
$[D]$	classe de D
$\sim$	$D \sim D' \Leftrightarrow D = D' + (x)$ pour $x \in F \setminus \{0\}$
$\mathcal{L}(A)$	$\mathcal{L}(A) := \{x \in F \mid (x) \geq -A\} \cup \{0\}$
$g := \max\{\deg A - \dim A + 1 \mid A \in D_F\}$	genre de F/K
$i(A) := \dim A - \deg A + g - 1$	index de spécialité
$\alpha := \begin{cases} P_F & \longrightarrow F \\ P & \longrightarrow \alpha_P \end{cases}$	répartition
$A_F := \{\alpha \text{ répartition de } F/K\}$	espace de répartition
$A_F(A) \text{ pour } A \in D_F$	$A_F(A) := \{\alpha \in A_F \mid v_P(\alpha) \geq -v_P(A), \forall P \in \mathbb{P}_F\}$
Ω_F	$\Omega_F := \{\omega \text{ différentielle de Weil de } F/K\}$
$\Omega_F(A)$	$\Omega_F(A) := \{w \in \Omega_F \mid w \text{ s'annule en } A_F(A) + F\}$
$\varphi : X \longrightarrow Y$	Morphisme entre courbes abstraites non singulières ou variétés

Introduction

Les notions que nous allons aborder sont très récentes et liées à la théorie de la valuation et à la géométrie algébrique.

Comment c'est deux "univers" mathématiques sont liés ?

Voilà l'une des questions à laquelle nous allons répondre.

Le nombre de zéros et de pôles étant fixé, on va chercher à étudier l'espace des courbes passant par ces points.

En fait, notre ter a pour but de démontrer le théorème clé lié à la théorie de la valuation, le théorème de Riemann Roch, qui répond à cette question, nous verrons de quelle manière.

Nous ferons ensuite quelques applications afin de vous faire entrevoir la puissance du théorème.

Ayant cet objectif, nous allons développer cette belle théorie en commençant dans un premier temps par définir le contexte nécessaire à son développement.

Ceci étant fait, nous poursuivrons notre travail en explicitant non sans peine (de part la complexité des notions que nous utiliserons) le lien entre géométrie algébrique et théorie de la valuation.

Après ces bons échauffements, nous pourrons envisager de faire la preuve du théorème de Riemann Roch mais nous aurons encore besoin de quelques notions supplémentaires pour pouvoir y parvenir.

Ayant enfin démontrer notre théorème, nous évoquerons quelques applications simples sous forme de théorèmes. Nous laisserons au lecteur curieux le loisir d'aller feuilleter les livres de la bibliographie où il en trouvera d'autres.

Nous finirons ainsi.

Il ne reste plus qu'à se lancer...

Chapitre 1

Théorie de la valuation

Nous cherchons à montrer le théorème Riemann Roch, par la théorie de la valuation.

[3] Pour cela nous commencerons par voir le vocabulaire relatif à la théorie de la valuation ainsi que des résultats importants relatifs à ces notions.

En parallèle, nous verrons la correspondance entre théorie de valuation et géométrie algébrique.

1.1 Théorie algébrique

Nous introduisons pour commencer quelques définitions de base et quelques résultats de la théorie des corps de fonctions algébriques à une variable sur K .

1.1.1 Anneau de valuation

Définition 1.1.1. :

Soit K un corps.

*Un **corps de fonctions algébriques à une variable sur K** est une extension de corps F/K telle que F soit une extension algébrique finie de $K(x)$ ($[F : K(x)] < \infty$) pour un élément $x \in F$, x transcendant sur K .*

*On dira que la clôture algébrique $\tilde{K}$ de K dans F est le **corps des constantes de F/K** .*

Dans la suite, nous dirons simplement que F/K est un corps de fonctions.

Remarque 1.1.2. :

- Il est clair que si F/K est un corps de fonctions, $F/\tilde{K}$ l'est aussi.
- Nous dirons que K est algébriquement clos dans F lorsque $K = \tilde{K}$.
- Un élément $x \in F$ est transcendant sur K si et seulement si $[F : K(x)] < \infty$.

Preuve de cette remarque :

$\Leftrightarrow$ Par l'absurde, si on suppose $a \in F$ algébrique sur k et tel que $[F : k(a)] < \infty$ alors $[F : k] = [F : k(a)][k(a) : k] < \infty$, ce qui contredit le fait que F contient des éléments transcendents sur k .

$\Rightarrow$ Soit $a \in F$ transcendant sur k .

On a $[k(x)(a) : k(x)] \leq [F : k(x)] < \infty$

Donc on peut trouver une polynôme $P = \sum_{n \geq 0} a_n(x)T^n \in k(x)[T]$ non constant tel que $P(x, a) = 0$.

Quitte à multiplier P par un polynôme en x , on peut même supposer que $P \in k[x][T]$.

Ecrivons $a_n(x) = \sum_{m \geq 0} \alpha_{n,m}x^m$ alors la relation $P(x, a) = 0$ se réécrit :

$$\sum_{m \geq 0} x^m \sum_{n \geq 0} \alpha_{n,m} a^n = \sum_{m \geq 0} b_m(a) x^m = 0$$

(où on a posé $b_m(a) = \sum_{n \geq 0} \alpha_{n,m} a^n$).

Comme a est transcendant sur F , on a nécessairement $a_n(x)$ non constant pour au moins un $n_0 \geq 0$ et même pour un $n_0 \geq 1$ (car x est également transcendant sur k) c'est à dire qu'il existe $m_0 \geq 1$ tel que $a_{n_0, m_0} \neq 0$.

Mais alors $b_{m_0}(a) \neq 0$ donc $Q = \sum_{m \geq 0} b_m(a)T^m \in k(a)[T]$ est un polynôme non nul annulateur de x ;

Autrement dit x est algébrique sur $k(a)$ ou encore $[k(a)(x) : k(a)] < \infty$.

De là, on déduit : $[F : k(a)] = [F : k(a)(x)][k(a)(x) : k(a)] < \infty$.

Définition 1.1.3. :

Soit F/K un corps de fonctions. On appelle **anneau de valuation de F/K** un anneau $\mathcal{O} \subseteq F$ avec les propriétés suivantes :

- $K \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq F$.
- Pour tout $z \in F$, $z \in \mathcal{O}$ ou $z^{-1} \in \mathcal{O}$.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation de F/K , nous noterons $\mathcal{O}^*$ le **groupe des unités de $\mathcal{O}$** c'est à dire l'ensemble des $z \in \mathcal{O}$ tels qu'il existe $x \in \mathcal{O}$ vérifiant $zx = 1$.

Proposition 1.1.4. :

Soit F/K un corps de fonctions, $\mathcal{O}$ un anneau de valuation de F/K .

- $\mathcal{O}$ est un anneau intègre local de corps de fractions F avec pour idéal maximal P donné par : $P = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$.
- $\tilde{K} \subseteq \mathcal{O}$ et $\tilde{K} \cap P = \{0\}$.

Preuve. :

- Nous montrerons simplement que $P = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$ est un idéal de $\mathcal{O}$.
En effet, la maximalité et l'unicité en découleront puisqu'un idéal propre de $\mathcal{O}$ ne peut contenir une unité.
Soient $x \in P$, $z \in \mathcal{O}$. Alors $xz \notin \mathcal{O}^*$ (sinon x serait une unité).
Par conséquent $xz \in P$.
Par ailleurs, soient $x, y \in P$.
Nous pouvons supposer que $\frac{x}{y} \in \mathcal{O}$.
Alors $1 + \frac{x}{y} \in \mathcal{O}$ et $x + y = y(1 + \frac{x}{y}) \in P$ d'après ce qui précède.
Donc P est un idéal de $\mathcal{O}$.

b. Soit $z \in \tilde{K}$.

Supposons que $z \notin \mathcal{O}$. Alors $z^{-1} \in \mathcal{O}$ par définition de $\mathcal{O}$.

Comme z^{-1} est algébrique sur K , il existe des éléments $a_1, \dots, a_r \in K$ tels que $a_r(z^{-1})^r + \dots + a_1 z^{-1} + 1 = 0$, alors $z^{-1}(a_r(z^{-1})^{r-1} + \dots + a_1) = -1$.

Donc $z = -(a_r(z^{-1})^{r-1} + \dots + a_1) \in K[z^{-1}] \subseteq \mathcal{O}$ (contradiction), alors $z \in \mathcal{O}$.

$\tilde{K} \cap P = \{0\}$ est clair puisque $\tilde{K} \subseteq \mathcal{O}^*$.

□

Lemme 1.1.5. :

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation du corps de fonctions F/K , P son idéal maximal et $0 \neq x \in P$. Soient $x_1, \dots, x_n \in P$ tels que $x_1 = x$ et $x_i \in x_{i+1}P$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Alors nous avons $n \leq [F : K(x)] < \infty$.

Preuve. :

On sait que $[F : K(x)] < \infty$ puisque $x \in P$ est transcendant sur K , alors il sera suffisant de montrer que $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants sur $K(x)$.

Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $\sum_{i=1}^n \varphi_i x_i = 0$ avec $\varphi_i \in K(x)$.

On peut supposer que tous les φ_i sont des polynômes en x et que x ne les divise pas tous.

Posons $a_i := \varphi_i(0)$, le terme constant de φ_i , donc il existe $j \in 1, \dots, n$ tel que $a_j \neq 0$ mais $a_i = 0$ pour tout $i > j$.

Nous obtenons :

$$-\varphi_j x_j = \sum_{i \neq j} \varphi_i x_i$$

avec $\varphi_i \in \mathcal{O}$ pour $i = 1, \dots, n$, $x_i \in x_j P$ pour $i < j$ (en particulier $x \in x_j P$) et $\varphi_i = x g_i$ pour $i > j$, où g_i est un polynôme en x .

En divisant $-\varphi_j x_j = \sum_{i \neq j} \varphi_i x_i$ par x_j , on obtient :

$$-\varphi_j = \sum_{i < j} \varphi_i \cdot \frac{x_i}{x_j} + \sum_{i > j} \frac{x}{x_j} \cdot g_i x_i.$$

tous les termes de droite de l'égalité appartiennent à P , donc $\varphi_j \in P$.

Or $\varphi_j = a_j + x g_j \in P$ donc $a_j = \varphi_j - x g_j \in P \cap K = \{0\}$, ce qui contredit $a_j \neq 0$.

On a donc $x_1, \dots, x_n$ linéairement indépendants sur $K(x)$.

□

Théorème 1.1.6. :

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation d'un corps de fonctions F/K et P son idéal maximal. Alors :

- P est un idéal principal.
- Si $P = t\mathcal{O}$ alors tout $0 \neq z \in F$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = t^n u$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathcal{O}^*$.
- $\mathcal{O}$ est un anneau principal. Plus précisément, si $P = t\mathcal{O}$ et $\{0\} \neq I \subseteq \mathcal{O}$ est un idéal de $\mathcal{O}$ alors il existe $n \geq 0$ $I = t^n$.

Un anneau ayant les trois propriétés ci-dessus est appelé **anneau de valuation discrète**.

Preuve. :

- Supposons que P n'est pas un idéal principal.

Choisissons un élément $0 \neq x_1 \in P$.

Comme $P \neq x_1\mathcal{O}$ il existe $x_2 \in P \setminus x_1\mathcal{O}$. Or $x_2 \notin x_1\mathcal{O} \iff x_2x_1^{-1} \notin \mathcal{O} \iff x_2^{-1}x_1 \in P \iff x_1 \in x_2P$.

Par induction nous obtenons une infinité de $x_1, x_2, \dots \in P$ tel que $x_i \in x_{i+1}P$ pour $i \geq 1$, ce qui contredit le lemme 1.1.5.

Donc P est un idéal principal.

- Si $z = t^m u = t^n v$. On suppose $n \geq m$ alors $t^{n-m} = uv^{-1} \in \mathcal{O}^*$ donc $n = m$ et donc $u = v$.

On a donc l'unicité de la représentation $z = t^n u$ avec $u \in \mathcal{O}^*$, montrons son existence.

Comme z ou z^{-1} est dans $\mathcal{O}$ on peut supposer que $z \in \mathcal{O}$. Pour $z \in \mathcal{O}^*$ on a $z = t^0 z$.

Il reste à montrer le cas où $z \in P$. Il existe $m \geq 1$ maximal tel que $z \in t^m \mathcal{O}$. En effet, $z \in P = t\mathcal{O}$ et $\forall m \geq 1$ si $z \in t^m \mathcal{O}$ alors $x_1 = z, x_2 = t^{m-1}, x_3 = t^{m-2}, \dots, x_m = t$ vérifient les hypothèses du lemme 1.1.5 donc $m \geq [F : K(z)] \geq \infty$ ($z \notin \tilde{K}$). Nous écrivons alors $z = t^m u$ avec $u \in \mathcal{O}$.

Si $u \notin \mathcal{O}^*$, alors $u \in P = t\mathcal{O}$, alors $u = t\omega$ avec $\omega \in \mathcal{O}$ et $z = t^{m+1}\omega \in t^{m+1}\mathcal{O}$, ce qui contredit la maximalité de m . Donc $u \in \mathcal{O}^*$.

- Soit $\{0\} \neq I \subseteq P$ un idéal.

L'ensemble $A := \{r \in \mathbb{N} \mid t^r \in I\}$ est non vide.

En effet, si $0 \neq x \in I$ alors $x = t^r u$ avec $u \in \mathcal{O}^*$ et $t^r = xu^{-1} \in I$.

Posons $n := \min(A)$. Nous avons que $I = t^n \mathcal{O}$. $t^n \mathcal{O}$ est clairement inclu dans I puisque $t^n \in I$. Soit $y \in I$, $y \neq 0$. Nous avons $y = t^s \omega$ avec $\omega \in \mathcal{O}^*$ et $s \geq 0$, alors $t^s \in I$ et $s \geq n$.

Donc $y = t^n \cdot t^{s-n} \omega \in t^n \mathcal{O}$.

□

1.1.2 Valuation discrète

Définition 1.1.7. :

Soit F/K un corps de fonctions. Une valuation discrète sur F/K est une fonction $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ avec les propriétés suivantes :

- a. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.
- b. $v(xy) = v(x) + v(y)$ pour tout $x, y \in F$.
- c. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ pour tout $x, y \in F$.
- d. Il existe un élément $z \in F$ tel que $v(z) = 1$.
- e. $v(a) = 0$ pour tout $0 \neq a \in K$.

Dans ce contexte, le symbole ∞ représente un élément qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$ tel que $\infty + \infty = n + \infty = \infty$ et $\infty > m$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

De 1., 2. et 4. on a directement que $v : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$ est surjective.

Le 3. est appelé l'inégalité triangulaire.

Remarque 1.1.8. :

La notion de valuation et d'inégalité triangulaire est justifiée par la remarque suivante :

Soit v est une valuation discrète de F/K dans le sens de la définition précédente.

Soit $0 < c < 1$; on définit la fonction $| \cdot |_v : F \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$|z|_v := \begin{cases} c^{v(z)} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Il est facile vérifier que cette fonction a les propriétés d'une valeur absolue ordinaire ; l'inégalité triangulaire ordinaire $|x + y|_v \leq |x|_v + |y|_v$ est une conséquence immédiate de la condition 3. de la définition

Lemme 1.1.9. (L'inégalité triangulaire stricte) :

Soit F/K un corps de fonctions, v une valuation discrète sur F/K . Si pour $x, y \in F$ nous avons $v(x) \neq v(y)$, alors $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$.

Preuve. :

Nous pouvons déjà observer que $v(ax) = v(x)$ pour $0 \neq a \in K$ (par 2. et 5.), en particulier $v(-y) = v(y)$.

Puisque $v(x) \neq v(y)$, nous pouvons supposer que $v(x) < v(y)$.

Supposons que $v(x + y) \neq \min\{v(x + y), v(y)\} > v(x)$, donc $v(x + y) > v(x)$ par 3., et nous obtenons $v(x) = v((x + y) - y) \geq \min\{v(x + y), v(y)\} > v(x)$, d'où une contradiction.

Le lemme est ainsi démontré.

□

1.1.3 Places

Définition 1.1.10. :

- a. Une **place** P d'un corps de fonctions F/K est l'idéal maximal de l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de F/K . Tout élément $t \in P$ tel que $P = t\mathcal{O}$ est appelé **uniformisante en P** (ou encore **paramètre local en P**).
- b. On notera $\mathbb{P}_F$ l'ensemble des places de F/K .

Si $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation de F/K et P son idéal maximal, alors $\mathcal{O}$ est uniquement déterminé par P . En effet, $\mathcal{O} = \{ z \in F \mid z^{-1} \notin P \}$. On notera donc $\mathcal{O}_P := \mathcal{O}$ l'anneau de valuation à la place P .

Définition 1.1.11. :

A toute place $P \in \mathbb{P}_F$ on associe une valuation discrète de F/K , $v_P : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$ définie par : $v_P(0) := \infty$ et $v_P(z) := n$ pour $z = t^n u$, $u \in \mathcal{O}^*$, $n \in \mathbb{Z}$ et t un uniformisant en P (cette représentation existe pour tout $0 \neq z \in F$ et est unique par le théorème 1.1.6 b.).

Remarque 1.1.12. :

Cette définition dépend de P mais pas du choix de t .

En effet si t' est une autre uniformisante de P alors $P = t\mathcal{O} = t'\mathcal{O}'$, donc $t = t'w$ pour un $w \in \mathcal{O}_P^*$. Ainsi $t^n u = (t'^n w^n)u = t'^n (w^n u)$ avec $w^n u \in \mathcal{O}_P^*$.

Théorème 1.1.13. :

Soit F/K un corps de fonctions.

- a. Pour tout $P \in \mathbb{P}_F$, v_P la valuation discrète de F/K associée. Alors on a :

$$\mathcal{O}_P = \{ z \in F \mid v_P(z) \geq 0 \}$$

$$\mathcal{O}_P^* = \{ z \in F \mid v_P(z) = 0 \}$$

$$P = \{ z \in F \mid v_P(z) > 0 \}.$$

Un élément $x \in F$ est uniformisant en P si et seulement si $v_P(x) = 1$.

- b. Inversement, supposons que v soit une valuation discrète de F/K . Alors l'ensemble $P := \{ z \in F \mid v(z) > 0 \}$ est une place de F/K , et $\mathcal{O}_P = \{ z \in F \mid v(z) \geq 0 \}$ est l'anneau de valuation correspondant.
- c. Tout anneau de valuation $\mathcal{O}$ de F/K est un sous-anneau propre maximal de F .

Preuve. :

- a. Nous allons simplement vérifier l'inégalité triangulaire puisque v_P satisfait les autres propriétés.

Considérons $x, y \in F$ avec $v_P(x) = n$, $v_P(y) = m$.

Nous pouvons supposer que $n \leq m < \infty$, ainsi $x = t^n u_1$ et $y = t^m u_2$ avec $u_1, u_2 \in \mathcal{O}_P^*$.

Alors $x + y = t^n (u_1 + t^{m-n} u_2) = t^n z$ avec $z \in \mathcal{O}_P$.

Si $z = 0$ nous avons $v_P(x + y) = \infty > \min \{n, m\}$.

D'autre part $z = t^k u$ avec $k \geq 0$ et $u \in \mathcal{O}_P^*$.

Donc

$$v_P(x + y) = v_P(t^{n+k} u) = n + k \geq n = \min \{v_P(x), v_P(y)\}.$$

alors v_P est une valuation discrète de F/K .

b. Cette assertion est triviale.

c. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation de F/K , P son idéal maximal, v_P la valuation discrète associée à P et $z \in F \setminus \mathcal{O}$.

Nous allons montrer que $F = \mathcal{O}[z]$. Pour cela considérons un élément $y \in F$; $v_P(yz^{-k}) \geq 0$ pour $k \geq 0$ suffisamment grand (retenons que $v_P(z^{-1}) > 0$ puisque $z \notin \mathcal{O}$).

Par conséquent $\omega := yz^{-k} \in \mathcal{O}$ et $y = \omega z^k \in \mathcal{O}[z]$.

□

D'après le théorème 1.1.13, les places, les anneaux de valuation et les valuations discrètes d'un corps de fonctions définissent essentiellement la même chose.

Définition 1.1.14. :

Soit P une place et $\mathcal{O}_P$ son anneau de valuation.

a. On note $\mathbb{F}_P := \frac{\mathcal{O}_P}{P}$ le **corps résiduel à la place P** . On peut alors définir **application**

résiduelle à la place P définie comme suit : $\kappa := \begin{cases} x & \mapsto x(P) \\ F & \rightarrow \mathbb{F}_P \cup \{\infty\} \end{cases}$

avec $x(P)$ définit ainsi :

– si $x \in \mathcal{O}_P$, on pose $x(P) = x \bmod P$

– si $x \notin \mathcal{O}_P$, on pose $x(P) = \infty$

Attention ici ∞ n'a pas le même sens que dans la définition 1.1.7

b. $\deg P := [\mathbb{F}_P : K]$ est appelé **degré de P** .

Par la proposition 1.1.4, on a que $K \subseteq \mathcal{O}_P$ et $K \cap P = \{0\}$, donc l'application de la classe résiduelle $\mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{F}_P$ induit une injection canonique de K dans $\mathbb{F}_P$.

C'est pour cela que nous considérerons K comme un sous corps de $\mathbb{F}_P$ via cette injection.

Remarquons que cet argument s'applique aussi à $\tilde{K}$; Par conséquent, nous pouvons considérer $\tilde{K}$ comme un sous corps de $\mathbb{F}_P$.

La proposition qui va suivre montre que le degré d'une place est toujours fini.

Proposition 1.1.15. :

Si P est une place de F/K et $0 \neq x \in P$ alors

$$\deg P \leq [F : K(x)] < \infty.$$

Preuve. :

Nous savons que $[F : K(x)] < \infty$, ainsi il est suffisant de montrer que des éléments $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{O}_P$, dont les classes résiduelles $z_1(P), \dots, z_n(P) \in \mathbb{F}_P$ sont linéairement indépendantes sur K , sont linéairement indépendants sur $K(x)$.

Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i z_i = 0$$

avec $\varphi_i \in K(x)$.

Nous supposons que les φ_i soient des polynômes en x et non tous divisibles par x , i.e $\varphi_i = a_i + xg_i$ avec $a_i \in K$, $g_i \in K[x]$, où tous les a_i ne sont pas nuls.

Comme $x \in P$ et $g_i \in \mathcal{O}_P$, $\varphi_i(P) = a_i(P) = a_i$. En utilisant l'application résiduelle à $\sum_{i=1}^n \varphi_i z_i = 0$ on obtient

$$0 = 0(P) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(P) z_i(P) = \sum_{i=1}^n a_i z_i(P).$$

Cela contredit l'indépendance linéaire des $z_1(P), \dots, z_n(P)$ sur K . □

Corollaire 1.1.16. :

Le corps $\tilde{K}$ des constantes de F/K est une extension de corps finis de K .

Preuve. :

Choisissons $P \in \mathbb{P}_F$ alors $\mathbb{P}_F \neq \emptyset$ d'après le corollaire . Comme $\tilde{K}$ est envoyé dans $\mathbb{F}_P$ par l'application résiduelle $\mathcal{O}_P \longrightarrow \mathbb{F}_P$, il s'en suit que $[\tilde{K} : K] \leq [\mathbb{F}_P : K] < \infty$. □

Remarque 1.1.17. :

Dans le cas où $\deg P = 1$ nous avons $\mathbb{F}_P = K$, et l'application résiduelle envoie F dans $K \cup \{\infty\}$. En particulier, si K est un corps algébriquement clos, toute place a pour degré 1, donc nous pouvons voir tout élément $z \in F$ comme une fonction

$$z = \begin{cases} \mathbb{P}_F & \longrightarrow K \\ P & \longmapsto z(P) \end{cases}$$

C'est la raison pour laquelle F/K est appelée corps de fonctions. Les éléments de K , sont considérés comme des constantes dans le sens de l'application ci-dessus (nous définirons ainsi une constante dans la suite sauf mention du contraire) .

On en déduit donc que K est le corps des constantes de F . Cela justifie aussi la définition suivante.

Définition 1.1.18. :

Soit $z \in F$ et $P \in \mathbb{P}_F$.

*Nous dirons que P est un **zéro de z** si et seulement si $v_P(z) > 0$;*

*P est un **pôle de z** si et seulement si $v_P(z) < 0$.*

*Si $v_P(z) = m > 0$, on dit que P est un **zéros de z d'ordre m** ;*

*si $v_P(z) = -m < 0$, on dit que P est un **pôle d'ordre m** .*

Théorème 1.1.19. :

Soit F/K un corps de fonctions et R un sous-anneau de F avec $K \subseteq R \subseteq F$.

Supposons que $\{0\} \neq I \subsetneq R$ est un idéal propre de R .

Alors il existe une place $P \in \mathbb{P}_F$ telle que $I \subseteq P$ et $R \subseteq \mathcal{O}_P$.

Preuve. :

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} := \{S \mid S \text{ est un sous anneau de } F \text{ avec } R \subseteq S \text{ et } IS \neq S\}.$$

(par définition, IS est l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum a_v s_v$ avec $a_v \in I, s_v \in S$; c'est un idéal de S .)

$\mathcal{F}$ est non vide puisque $R \in \mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est ordonné inductif par l'inclusion.

En effet, si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ est un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{F}$ alors $T := \bigcup \{S \mid S \in \mathcal{H}\}$ est sous-anneau de $\mathcal{F}$ avec $R \subseteq T$. Nous allons vérifier que $IT \neq T$. Supposons que $IT = T$, alors $1 = \sum_{v=1}^n a_v s_v$ avec $a_v \in I, s_v \in T$. Comme $\mathcal{H}$ est totalement ordonné il existe un $S_0 \in \mathcal{H}$ tel que $s_1, \dots, s_n \in S_0$, alors $1 = \sum_{v=1}^n a_v s_v \in IS_0$, contradiction.

Donc $IT \neq T$.

Par le lemme de Zorn $\mathcal{F}$ admet un élément maximal, i.e il y a un anneau $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$ tel que $R \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$, $I\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$, et $\mathcal{O}$ est maximal pour cette propriété. Nous voulons montrer que $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation de F/K .

Comme $I \neq \{0\}$ et $I\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$ nous avons $\mathcal{O} \subsetneq F$ et $I \subseteq \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$. Supposons qu'il existe un élément $z \in F$ avec $z \notin \mathcal{O}$ et $z^{-1} \notin \mathcal{O}$. Alors $I\mathcal{O}[z] = \mathcal{O}[z]$ et $I\mathcal{O}[z^{-1}] = \mathcal{O}[z^{-1}]$, et nous pouvons trouver $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in I\mathcal{O}$ avec

$$1 = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$$

et

$$1 = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}.$$

Pour $n \geq 1$, $m \geq 1$ et n, m minimaux pour chacune des équations. Supposons que $m \leq n$. En multipliant la première équation par $1 - b_0$ et la seconde par $a_n z^n$ nous obtenons

$$1 - b_0 = (1 - b_0)a_0 + (1 - b_0)a_1 z + \dots + (1 - b_0)a_n z^n$$

et

$$0 = (b_0 - 1)a_n z^n + b_1 a_n z^{n-1} + \dots + b_m a_n z^{n-m}.$$

En additionnant ces deux équations nous avons $1 = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$ avec les coefficients $c_i \in I\mathcal{O}$. Ce qui contredit la minimalité de n .

Ainsi nous avons montré que $z \in \mathcal{O}$ où $z^{-1} \in \mathcal{O}$ pour $z \in F$, donc $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation de F/K . Et $\mathcal{O}$ vérifie les conclusions du théorème. $\square$

Corollaire 1.1.20. :

Soit F/K un corps de fonctions, $z \in F$ transcendant sur K . Alors z a au moins un zéro et un pôle. En particulier, $\mathbb{P}_F \neq \emptyset$.

Preuve. :

Considérons l'anneau $R = K[z]$ et l'idéal $I = zK[z]$, alors par le théorème 1.1.19 il existe une place $P \in \mathbb{P}_F$ tel que $z \in P$, ainsi P est un zéro de z .

Le même argument prouve que z^{-1} a un zéro $Q \in \mathcal{P}_F$. Donc Q est un pôle de z . $\square$

Le corollaire ci-dessus peut-être interprété comme suit : Tout $z \in F$, qui n'est pas dans le corps des constantes $\tilde{K}$ de F/K , est une fonction non constante.

1.2 Le corps des fonctions rationnelles

Pour pouvoir comprendre les valuations et les places d'un corps de fonctions arbitraire, une idée précise de cette notion dans le plus simple des cas est indispensable.

C'est pourquoi, nous allons voir le cas du corps des fonctions rationnelles $F = K(x)$, où x est un élément transcendant de K .

Etant donné un polynôme irréductible unitaire $p(x) \in K[x]$.

Considérons son anneau de valuation :

$$\mathcal{O}_{p(x)} := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[x], p(x) \text{ ne divisant pas } g(x) \right\} \quad (1.1)$$

dans $K(x)/K$ et son idéal maximal :

$$P_{p(x)} := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[x], p(x) \text{ divisant } f(x), p(x) \text{ ne divisant pas } g(x) \right\} \quad (1.2)$$

Dans le cas particulier où $p(x)$ est linéaire c'est à dire $p(x) = x - \alpha$ avec $\alpha \in K$, nous noterons $P_\alpha = P_{x-\alpha} \in P_{p(x)}$.

Il y a un autre anneau de valuation

$$\mathcal{O}_\infty := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[X], \deg f(x) \leq \deg g(x) \right\} \quad (1.3)$$

et son idéal maximal

$$P_{p(x)} := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[X], \deg f(x) \leq \deg g(x) \right\} \quad (1.4)$$

On l'appelle **place à l'infini** de $K(x)$.

On observe que ces définitions dépendent du choix spécifique de l'élément générateur x de $K(x)/K$ (par exemple $K(x) = K\left(\frac{1}{x}\right)$) et la place à l'infini par rapport à $\frac{1}{x}$ est la place P_0 par rapport à x .

Proposition 1.2.1. :

Soit $F = K(x)$ un corps de fonction rationnelle.

- a. Soit $P = P_{p(x)} \in P_{K(x)}$ la place définie par (1.2) où $P(x) \in K[x]$ est un polynôme irréductible alors $p(x)$ est une uniformisante de P et la valuation discrète v_p peut être décrite comme suit :

Si $z \in K[x] \setminus \{0\}$ s'écrit de la forme $z = p(x)^n \times \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $f(x), g(x) \in K[x]$, $p(x)$ ne divise pas $f(x)$ et $p(x)$ ne divise pas $g(x)$ alors $v_p(z) = n$. La classe résiduelle $K(x)_p = \frac{\mathcal{O}_P}{P}$ est isomorphe à $\frac{K[x]}{p(x)}$.

L'isomorphisme étant donné par :

$$\phi := \begin{cases} \frac{K[x]}{(p(x))} & \longrightarrow K(x)_P \\ f(x) \bmod p(x) & \longmapsto f(x)(P) \end{cases}$$

Par conséquent, $\deg P = \deg p(x)$.

- b. Dans le cas particulier de $p(x) = x - \alpha$ avec $\alpha \in K$, le degré de $P = P_\alpha$ est 1, et l'application de la classe résiduelle est donné par :

$$z(P) = z(\alpha) \text{ pour } z \in K(x)$$

où $z(\alpha)$ est définie comme suit, on écrit :

$$z = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ alors } z(\alpha) = \begin{cases} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} & \text{si } g(\alpha) \neq 0 \\ \infty & \text{si } g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

avec des polynômes irréductibles premiers entre eux $f(x), g(x) \in K[x]$.

- c. Enfin, soit $P = P_\infty$ définie par 1.4.

Alors $\deg(P_\infty) = 1$. L'uniformisante première de P_∞ est $t = \frac{1}{x}$ et la valuation discrète v_∞ est donnée par :

$$v_\infty\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \deg(g(x)) - \deg(f(x)) \text{ où } f(x), g(x) \in K[x].$$

L'application de la classe résiduelle correspondante à P_∞ est déterminée par $z(P_\infty) = z(\infty)$ pour $z \in K(x)$ où $z(\infty)$ est définie usuellement :

$$\text{si } z = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} \text{ avec } a_n, b_m \neq 0 \text{ alors } z(\infty) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

- d. K est le corps des constantes de $K(x)/K$.

Preuve. :

- a. Soit $P = P_{p(x)} \in K[x]$ irréductible. L'idéal $P_{p(x)} \subseteq \mathcal{O}_{p(x)}$ est clairement engendré par $p(x)$, alors $p(x)$ est un élément premier (uniformisant) pour P . Pour démontrer l'affirmation au sujet du corps des classes résiduelles, nous considérerons l'homomorphisme d'anneaux

$$\varphi := \begin{cases} K[x] & \longrightarrow K(x)_P \\ f(x) & \longmapsto f(x)(P) \end{cases}$$

Clairement, $\ker \varphi$ est l'idéal généré par $p(x)$. En plus, φ est surjective : si $z \in \mathcal{O}_{p(x)}$, nous pouvons écrire $z = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x), v(x) \in K[x]$ telque $p(x) \nmid v(x)$. Ainsi il y'a $a(x), b(x) \in K[x]$ avec $a(x)p(x) + b(x)v(x) = 1$, d'où

$$z = 1.z = \frac{a(x)u(x)}{v(x)}p(x) + b(x)u(x),$$

et $z(P) = (b(x)u(x))(P)$ est l'image de φ .

Ainsi φ induit un isomorphisme ϕ de $K[x]/(p(x))$ dans $K(x)_P$ et $\deg P = \deg p(x)$.

- b. Maintenant $P = P_\alpha$ avec $\alpha \in K$. Si $f(x) \in K[x]$ alors $(x - \alpha) \mid (f(x) - f(\alpha))$, donc $f(x)(P) = (f(x) - f(\alpha))(P) + f(\alpha)(P) = f(\alpha)$. Soit $z \in \mathcal{O}_P$ s' écrivant sous la forme $z = f(x)/g(x)$ avec $f(x), g(x) \in K[x]$ et $(x - \alpha) \nmid g(x)$, alors $g(x)(P) = g(\alpha) \neq 0$ et

$$z(P) = \frac{f(x)(P)}{g(x)(P)} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = z(\alpha).$$

- c. Considérons $z \in P_\infty$, on a $u = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $\deg f(x) < \deg g(x)$. D'où $z = \frac{1}{x} \frac{xf(x)}{g(x)}$ avec $\deg xf(x) \leq \deg g(x)$ et donc $z \in \frac{1}{x} \mathcal{O}_{P_\infty}$ ce qui prouve que $\frac{1}{x}$ engendre la place P_∞ . Soit $z \in K(x)^*$,

$$z = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

avec a_n et b_m non nuls. Posons $r = m - n$, alors

$$z = \left(\frac{1}{x}\right)^r \frac{a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_n}{b_0\left(\frac{1}{x}\right)^m + b_1\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} + \dots + b_m} \in \left(\frac{1}{x}\right)^r \mathcal{O}_{P_\infty}^*$$

donc $v_{P_\infty}(z) = r = m - n = \deg g(x) - \deg f(x)$. On a

$$z\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r > 0 \\ \infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

- d. Considérons une place $P \in K(x)/K$ de degré 1 (exemple : $P = P_\alpha$ avec $\alpha \in K$) le corps des constantes $\tilde{K}$ de $K(x)$ on a $[\tilde{K} : K] \leq [K(x)_P : K] = 1$ donc $\tilde{K} = K$.

□

Théorème 1.2.2. :

Il n'y a pas de places du corps des fonction rationnelle $K(x)/K$ en dehors de $P_{p(x)}$ et P_∞ , définies par 1.2 et 1.4.

Preuve. :

Soit P une place de $K(x)/K$. Deux cas sont possibles.

- a. $x \in \mathcal{O}_P$ alors $K[x] \subset \mathcal{O}_P$. Alors $I := P \cap K[x]$ est un idéal premier de $K[x]$ donc il est égal à $\{0\}$ ou à $\langle Q \rangle$ pour un certain polynôme irréductible Q . Supposons que $I = P \cap K[x] = \{0\}$; alors pour tout $g \in K[x]^*$, on a $g(x) \in \mathcal{O}_P/P$ donc $g \in \mathcal{O}_P^\times$. Par suite tout élément $z = \frac{f(x)}{g(x)} \in L^*$ appartient à $\mathcal{O}_P$ ce qui est impossible puisque $\mathcal{O}_P \subsetneq L$. On a donc $I = \langle Q \rangle$. Montrons alors que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_Q$. Pour tout $z \in \mathcal{O}_Q$, $z = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $(g, Q) = 1$ donc $g \notin I$ et $g \notin P$. Donc $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}_P$ et $z \in \mathcal{O}_P$. Par suite $\mathcal{O}_Q \subset \mathcal{O}_P$ et comme $\mathcal{O}_P$ est un sous-anneau propre on a $\mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_P$.
- b. $x \notin \mathcal{O}_P$ alors $1/x \in P$ et $K[1/x] \subset \mathcal{O}_P$ de plus $1/x \in P \cap K[1/x]$. Posons $z = 1/x$ et $I = P \cap K[z]$. I est un idéal de $K[z]$ contenant z donc $I = \langle z \rangle$. Pour tout $g(z) \in K[z]$ non divisible par z , on a $g \notin I$ donc $g \notin P$. D'où, pour tout $f(z) \in K[z]$, on a $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}_P$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_P &\supset \left\{ \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, b_0 \neq 0 \right\} \\ \mathcal{O}_P &\supset \left\{ \frac{a_0 x^{m+n} + a_1 x^{m+n-1} + \dots + a_n x^m}{b_0 x^{m+n} + b_1 x^{m+n-1} + \dots + b_m x^n}, b_0 \neq 0 \right\} \\ \mathcal{O}_P &\supset \left\{ \frac{f(x)}{g(x)}, \deg f(x) \leq \deg g(x) \right\} = \mathcal{O}_\infty\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_\infty$ et $P = P_\infty$.

□

Corollaire 1.2.3. :

Les places de $K(x)/K$ de degré 1 sont en correspondance 1.1 avec $K \cup \{\infty\}$.

Preuve. La preuve se déduit de la proposition 1.2.1 et du théorème 1.2.2.

□

En termes de géométrie algébrique, $K \cup \{\infty\}$ est généralement interprété comme la droite projective de $\mathbb{P}^1(K)$ par K , de plus les places de $K(x)/K$ de degré 1 s'identifie par une correspondance 1.1 aux points de $\mathbb{P}^1(K)$.

1.3 Indépendance des valuations

Théorème 1.3.1 (Théorème de faible approximation). :

Soit F/K un corps de fonctions, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{P}_F$ des places de F/K deux à deux distinctes, $x_1, \dots, x_n \in F$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$. Alors il existe $x \in F$ tel que

$$v_{P_i}(x - x_i) = r_i \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Preuve. :

Pour simplifier nous écrirons v_i au lieu de v_{P_i} .

– **Étape 1 :**

Montrons tout d'abord, par récurrence sur $n \geq 2$, qu'il existe $z \in F$ tel que $v_1(z) > 0$ et $v_i(z) < 0$ pour $2 \leq i \leq n$.

Preuve de l'étape 1 :

Si $n=2$, $\mathcal{O}_{P_1}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{O}_{P_2}$ et inversement, puisque les anneaux de valuations sont des sous-anneaux propres maximaux de F (voir théorème 1.1.13). Par suite :

$$\exists y_1 \in \mathcal{O}_{P_1} \setminus \mathcal{O}_{P_2} \text{ on a donc } v_1(y_1) \geq 0, v_2(y_1) < 0$$

$$\exists y_2 \in \mathcal{O}_{P_2} \setminus \mathcal{O}_{P_1} \text{ on a donc } v_2(y_2) \geq 0, v_1(y_2) < 0$$

et donc $z = \frac{y_1}{y_2}$ vérifie $v_1(z) > 0$ et $v_2(z) < 0$.

Supposons qu'il existe $y \in F$ tel que $v_1(y) > 0$ et $v_i(y) < 0$ pour $i = 2, \dots, n-1$. Si $v_n(y) < 0$, la preuve est finie. Sinon, soit $u \in F$ tel que $v_1(u) > 0$ et $v_n(u) < 0$ et posons $z = y + u^r$, avec un r entier ≥ 1 tel que $rv_i(u) \neq v_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Alors $v_1(z) \geq \min\{v_1(y), rv_1(u)\} > 0$ et $v_i(z) = \min\{v_i(y), rv_i(u)\} < 0$ pour tout $i = 2, \dots, n$ donc z convient.

– **Étape 2 :**

Montrons qu'il existe $\omega \in F$ tel que $v_1(\omega - 1) > r_1$ et $v_i(\omega) > r_i$ pour $i = 2, \dots, n$.

Preuve de l'étape 2 :

Soit $z \in F$ tel que $v_1(z) > 0$ et $v_i(z) < 0$ pour $2 \leq i \leq n$. Et posons $\omega := (1 + z^s)^{-1}$, pour un certain entier s . Comme $v_1(z) > 0$, on a $v_1(1 + z^s) = 0$ et

$$v_1(\omega - 1) = v_1\left(\frac{-z^s}{1+z^s}\right) = sv_1(z) \text{ et } v_i(\omega) = v_i\left(\frac{1}{1+z^s}\right) = -sv_i(z)$$

donc si s est assez grand on aura $v_1(\omega - 1) > r_1$ et $v_i(\omega) > r_i$ pour $2 \leq i \leq n$.

– **Étape 3 :**

Montrons que si on se donne $y_1, \dots, y_n \in F$, il existe $z \in F$ tel que $v_i(z - y_i) > r_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve de l'étape 3 :

Soit $s \in \mathbb{Z}$ tel que $v_i(y_j) \geq s$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. D'après 2., pour $1 \leq i \leq n$, il existe $\omega_i \in F$ tel que $v_i(\omega_i - 1) > r_i - s$ et $v_i(\omega_j) > r_i - s$ pour $j \neq i$. Posons $z := \sum_{j=1}^n y_j \omega_j$. Alors

$$z - y_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n y_j \omega_j - y_i(\omega_i - 1)$$

et donc

$$v_i(z - y_i) \geq \min\{\min_{j \neq i} \{v_i(y_j \omega_j)\}, v_i(y_i) + v_i(\omega_i - 1)\}$$

Or pour $j \neq i$, $v_i(y_j \omega_j) > s + r_i - s = r_i$ et $v_i(y_i) + v_i(\omega_i - 1) > r_i$ donc $v_i(z - y_i) > r_i$ et on a le résultat souhaité.

– **Étape 4 :**

Démonstration de l'assertion du théorème : il existe $x \in F$ tel que $v_{P_i}(x - x_i) = r_i$ pour $i = 1, \dots, n$

Preuve de l'étape 4 :

D'après 3., il existe $z \in F$ tel que $v_i(z - x_i) > r_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Soit $z_i \in F$ tel que $v_i(z_i) = r_i$ pour tout i (par exemple $z_i = t_i^{r_i}$ où t_i est un paramètre local en P_i .) D'après 3., il existe $z' \in F$ tel que $v_i(z' - z_i) > r_i$ pour tout i . Alors

$$v_i(z') = v_i(z' - z_i + z_i) = \min(v_i(z' - z_i), v_i(z_i)) = r_i$$

et si $x := z + z'$, on a $v_i(x - x_i) = v_i(z - x_i + z') = \min\{v_i(z - x_i), v_i(z')\} = r_i$, donc x répond à la question.

□

Ce théorème dit essentiellement que :

Si $v_1, \dots, v_n$ sont des valuations discrètes deux à deux distinctes de F/K et $z \in F$, et si nous connaissons les valeurs $v_1(z), \dots, v_{n-1}(z)$, alors nous ne pouvons rien conclure au sujet de $v_n(z)$.

Corollaire 1.3.2. :

Tout corps de fonctions a une infinité de places.

Preuve. :

Supposons qu'il y'a un nombre fini de places, $P_1, \dots, P_n$. D'après le théorème de faible approximation nous pouvons trouver un élément non nul $x \in F$ avec $v_{P_i}(x) > 0$, pour $i = 1, \dots, n$. Alors x est transcendant sur K car il a des zéros, mais x n'a pas de pôles, ce qui contredit le corollaire 1.1.20. □

Proposition 1.3.3. :

Soit F/K un corps de fonctions et $P_1, \dots, P_r$ les zéros de l'élément $x \in F$. Alors

$$\sum v_{P_i}(x).deg P_i \leq [F : K(x)].$$

Preuve. :

Posons $v_i := v_{P_i}$, $f_i := deg P_i$, $e_i := v_i(x)$, et notons $\mathcal{O}_i$ (resp. F_i) l'anneau de valuation en P_i (resp. le corps résiduel en P_i). D'après le théorème 1.3.1, pour tout i il existe $t_i \in F$ tel que $v_i(t_i) = 1$ et $v_k(t_i) = 0$ pour tout $k \neq i$.

Ensuite, on choisit $s_{i1}, \dots, s_{if_i} \in \mathcal{O}_i$ tels que $\{s_{i1}(P_i), \dots, s_{if_i}(P_i)\}$ soit une base de F_i sur K . Grâce à une application du théorème 1.3.1 pour tout i, j on peut trouver z_{ij} tel que :

$$v_i(s_{ij} - z_{ij}) > 0 \text{ et } v_k(z_{ij}) \geq e_k \text{ pour tout } k \neq i$$

Montrons que les éléments $t_i^a z_{ij}$ où $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq f_i$, $0 \leq a < e_i$ sont linéairement indépendants sur $K(x)$.

Supposons qu'il existe une relation linéaire non triviale sur $K(x)$:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} \sum_{a=0}^{e_i-1} \varphi_{ija} t_i^a z_{i,j} = 0 \quad (1.5)$$

et on suppose $\varphi_{ija} \in K[x]$ non tous nuls.

Alors il existe des indices $k \in \{1, \dots, r\}$ et $c \in \{0, \dots, e_k - 1\}$ tels que :

x divise φ_{kja} pour un $a < c$ et un $j \in \{1, \dots, f_k\}$ et x ne divise pas φ_{kjc} pour un $j \in \{1, \dots, f_k\}$ (1.6)

En multipliant (1.5) par t_k^{-c} on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} \sum_{a=0}^{e_i-1} \varphi_{ija} t_i^a t_k^{-c} z_{ij} = 0 \quad (1.7)$$

Pour $i \neq k$, tous les termes de (1.7) sont dans P_K puisque :

$$v_k(\varphi_{ija} t_i^a t_k^{-c} z_{ij}) = v_k(\varphi_{ija}) + av_k(t_i) - cv_k(t_k) + v_k(z_{ij}) \geq 0 + 0 - c + e_k > 0$$

Pour $i = k$ et $a < c$ on a x divise φ_{kja} donc $v_k(\varphi_{kja}) \geq e_k$ et :

$$v_k(\varphi_{kja} t_k^{a-c} z_{kj}) \geq e_k + a - c \geq e_k - c > 0$$

Pour $i = k$ et $a > c$ on a :

$$v_k(\varphi_{kja} t_k^{a-c} z_{kj}) \geq a - c > 0$$

En combinant ces relations et la relation (1.7) on en déduit :

$$\sum_{j=1}^{f_k} \varphi_{kjc} z_{kj} \in P_k \quad (1.8)$$

On remarque que $\varphi_{kjc}(P_k) \in K$ et d'après la relation 1.6 les $\varphi_{kjc}(P_k)$ ne sont pas tous nuls donc la relation 1.8 induit une relation linéaire non triviale :

$$\sum_{j=1}^{f_k} \varphi_{kjc}(P_k) \cdot z_{kj}(P_k) = 0$$

sur K .

Ce qui contredit le fait que $\{z_{k1}(P_k), \dots, z_{kf_k}(P_k)\}$ soit une base de F_k/K .

Les éléments $t_i^a \cdot z_{ij}$ où $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq f_i$, $0 \leq a < e_i$ sont donc linéairement indépendants sur $K(x)$ et leur nombre est égal à $\sum_{i=1}^n f_i e_i = \sum_{i=1}^n v_{P_i}(x) \cdot \deg P_i$ d'où le résultat. $\square$

Corollaire 1.3.4. :

Dans un corps de fonctions F/K , tout élément $0 \neq x \in F$ n'a qu'un nombre fini de zéros et pôles.

Preuve. :

Si x est constant, x n'a ni de zéros ni de pôles.

Si x est transcendant sur K , le nombre de zéros est $\geq [F : K(x)]$ d'après la proposition 1.3.3.

Le même argument montre que x^{-1} a un nombre fini de zéros. $\square$

1.4 Lien avec la géométrie

[2] On suppose maintenant que K est algébriquement clos.

En fait, dans cette partie, nous cherchons à établir un lien entre l'ensemble des anneaux de valuations discrètes d'un corps des fonctions F/K et les K -courbes non singulières de corps de fonctions F .

Pour cela nous commencerons par définir quelques notions qui vont nous servir dans cette partie ainsi que des résultats clé de la théorie de la valuation non énoncé précédemment.

Nous les citerons sans les démontrer.

Définition 1.4.1. :

Un anneau intègre A est **un anneau de Dedekind** si A est noethérien, de dimension 1 et intégralement clos dans son corps des fractions.

Théorème 1.4.2. :

La fermeture intégrale d'un anneau de Dedekind dans une extension séparable de degré fini sur son corps des fractions est encore un anneau de Dedekind.

Définition 1.4.3. :

Soient A et B deux anneaux locaux contenus dans un corps F . On dit que **B domine A** si $A \subseteq B$ et $m_B \cap A = m_A$ où m_A et m_B sont les idéaux maximaux de A et B respectivement.

Théorème 1.4.4. Soit K un corps.

Un anneau local R contenu dans K est un anneau de valuation de K si et seulement si c'est un élément maximal de l'ensemble des anneaux locaux contenus dans K , avec la relation de domination définie précédemment.

Nous rappelons quelques résultats concernant les anneaux de valuations discrètes.

Théorème 1.4.5. :

Soit A un anneau local noethérien de dimension 1, ayant pour idéal maximal m_A . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a. A est un anneau de valuation discrète ;
- b. A est intégralement clos ;
- c. A est un anneau local régulier ;
- d. m_A est un idéal principal.

Soit F/K un corps de fonctions et Y une K -courbe non singulière de corps de fonctions F .

Pour tout point fermé $P \in Y$, l'anneau local $\mathcal{O}_P$ de Y en P , est un anneau local noethérien de dimension 1 donc par $c \Rightarrow a$ du théorème 1.4.5 (et du théorème 1.1.13) $\mathcal{O}_P$ est un anneau de valuation de F/K .

Ainsi les anneaux locaux de Y définissent un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}_F$ des anneaux de valuations discrètes de F/K , ce qui motive la définition d'une courbe abstraite non singulière.

Lemme 1.4.6. :

Soit Y une variété quasi-projective, soient $P, Q \in Y$.

Supposons que $\mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P$ comme sous-anneau de $K(Y)$. Alors $P = Q$.

Preuve. :

Plongeons Y dans $\mathbb{P}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Remplaçons Y par sa clôture projective.

Nous pouvons supposer que Y est une variété projective.

Après un changement de variable convenable nous pouvons supposer que ni P ni Q n'est dans l'hyperplan H_0 défini par $x_0 = 0$.

Ainsi $P, Q \in Y \cap (\mathbb{P}^n - H_0)$ qui est affine, alors nous pouvons supposer que Y est une variété affine.

Soit A l'anneau affine de Y .

Il existe des idéaux maximaux $m, n \subseteq A$ tels que $\mathcal{O}_P = A_m$, et $\mathcal{O}_Q = A_n$.

Si $\mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P$, nous devons avoir $m \subseteq n$.

Mais comme m est un idéal maximal, alors $m = n$, et donc $P = Q$. □

Lemme 1.4.7. :

Soit F/K un corps de fonctions de dimension 1 sur K , et soit $x \in F$.

Alors $\{ R \in \mathcal{C}_F \mid x \notin R \}$ est un ensemble fini.

Preuve. :

Si R est un anneau de valuation, alors $x \notin R$ si et seulement si $\frac{1}{x} \in m_R$ (idéal maximal de R).

Alors soit $y = \frac{1}{x}$, nous devons montrer que si $y \in F$, $y \neq 0$, l'ensemble $\{R \in \mathcal{C}_F \mid y \in m_R\}$ est un ensemble fini.

Si $y \in K$, il n'y a pas de tel R , alors nous supposons que $y \notin K$.

Nous considérons le sous-anneau $K[y]$ de F engendré par y .

Comme K est algébriquement clos, y est transcendant sur K , ainsi $K[y]$ est un anneau de polynômes.

De plus, comme F est de type fini et de degré de transcendance 1 sur K , F est une extension de corps fini de $K(y)$.

Maintenant soit B la clôture intégrale de $K[y]$ dans F .

Alors B est un anneau de Dedekind et une K -algèbre de type finie (par le théorème 1.4.2).

Si y est contenu dans un anneau de valuation discrète R de F/K , alors $K[y] \subseteq R$, et comme R est intégralement clos dans F , nous avons $B \subseteq R$. Soit $n = m_R \cap B$.

Ainsi n est un idéal maximal de B , et B_n est dominé par R .

Mais B_n est aussi un anneau de valuation discrète de F/K , donc $B_n = R$ par le théorème 1.4.4.

Si de plus $y \in m_R$, alors $y \in n$.

B est l'anneau d'une variété affine Y (car toute K -algèbre de type finie est l'anneau d'une certaine variété affine), comme B est un anneau de Dedekind, Y a pour dimension 1 et est non singulière par le théorème 1.4.5 donc c'est une courbe non singulière.

Pour que $y \in n$ il faut que y comme fonction régulière sur Y , s'annule au point de Y correspondant à n .

Mais $y \neq 0$, donc y s'annule seulement sur un ensemble fini de points par le corollaire 1.3.4 qui correspondent aux idéaux maximaux de B , et $R = B_n$ est déterminé par l'idéal maximal n .

Donc $y \in m_R$ pour un nombre fini de $R \in \mathcal{C}_F$, comme voulu. □

Corollaire 1.4.8. :

Tout anneau de valuation discrète de F/K est isomorphe à l'anneau local d'un point sur une courbe affine non singulière.

Preuve. :

Soit R un anneau de valuation et $y \in F \setminus K$ alors la construction utilisée dans la preuve du lemme 1.4.7 donne une courbe qui convient. $\square$

Soit F/K un corps de fonctions de dimension 1 sur K . Soit $\mathcal{C}_F$ l'ensemble des anneaux de valuations discrètes de F/K . Nous considérerons les éléments de $\mathcal{C}_F$ comme des points c'est à dire nous écrirons $P \in \mathcal{C}_F$ où P est considéré comme une place de F/K d'anneau de valuation R_P .

L'ensemble $\mathcal{C}_F$ est infini puisqu'il contient tous les anneaux locaux (distincts d'après le lemme 1.4.6) de toute courbe non singulière de corps de fonctions F .

Nous définissons une topologie sur $\mathcal{C}_F$ en prenant les ensembles fermés comme étant les sous-ensembles finis, $\emptyset$ et $\mathcal{C}_F$ tout entier.

Si $U \subseteq \mathcal{C}_F$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{C}_F$, nous définissons l'anneau des fonctions régulières sur U par $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{P \in U} R_P$.

Un élément $f \in \mathcal{O}(U)$ définit une fonction $f : U \rightarrow K, P \rightarrow f(P) = f \bmod P$ (on rappelle que K est algébriquement clos).

Définition 1.4.9. :

*Une **courbe abstraite non singulière** est un sous-ensemble ouvert $U \subseteq \mathcal{C}_F$, où F est un corps de fonctions de dimension 1 sur K , avec la topologie induite, et la notion de fonctions régulières induite sur ses sous-ensembles ouverts.*

A priori il n'est pas clair qu'une courbe abstraite soit une variété, alors nous élargissons la catégorie des variétés en ajoutant les courbes abstraites.

Définition 1.4.10. :

*Un **morphisme** $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre courbes abstraites non singulières ou entre variétés est une application continue telle que pour tout ensemble ouvert $V \subseteq Y$, et toute fonction régulière $f : V \longrightarrow K$, $f \circ \varphi$ est une fonction régulière sur $\varphi^{-1}(V)$.*

Maintenant que nous avons apparemment élargi notre catégorie, notre travail sera de montrer que toute courbe quasi-projective non singulière est isomorphe à une courbe abstraite non singulière, et inversement. En particulier, nous montrerons que $\mathcal{C}_F$ lui-même est isomorphe à une courbe projective non singulière.

Proposition 1.4.11. :

Toute courbe quasi-projective non singulière Y est isomorphe à une courbe abstraite non singulière.

Preuve. :

Soit F le corps de fonctions de Y .

Alors pour tout $P \in Y$ l'anneau local $\mathcal{O}_P$ est un anneau de valuation discrète de F/K .

De plus deux points distincts de Y engendrent deux sous-anneaux distincts de F par le lemme 1.4.6.

Soit $U \subseteq \mathcal{C}_F$ l'ensemble des anneaux locaux de Y et soit $\varphi : Y \longrightarrow U$ l'application bijective définie par $\varphi(P) = \mathcal{O}_P$.

Nous montrerons tout d'abord que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{C}_F$.

Comme un ensemble ouvert est le complémentaire d'un ensemble fini, il suffit de montrer que U contient un ensemble ouvert non vide.

Quitte à remplacer Y par un ouvert affine non vide, on peut donc supposer que Y est affine d'anneau A .

Alors A est une K -algèbre de type fini et F est le corps des fractions de A , U est l'ensemble des localisations de A en ses idéaux maximaux.

Comme ces anneaux locaux sont tous des anneaux de valuations discrètes, U est constitué de tous les anneaux de valuations discrètes de F/K contenant A .

Maintenant soient $x_1, \dots, x_n$ l'ensemble des générateurs de A sur K .

Alors $A \subseteq R_P$ si et seulement si $x_1, \dots, x_n \in R_P$.

Ainsi $U = \bigcap U_i$, où $U_i = \{ P \in \mathcal{C}_F | x_i \in R_P \}$.

Mais $\{P \in \mathcal{C}_F | x_i \notin R_P\}$ est un ensemble fini.

Par conséquent U_i est ouvert et donc U est ouvert.

Nous allons donc montrer que U est une courbe abstraite non singulière.

Pour montrer que φ est un isomorphisme, nous devons seulement vérifier que les fonctions régulières sur tout ensemble ouvert sont les mêmes.

Mais cela découle de la définition des fonctions régulières de U et le fait que pour tout ensemble ouvert $V \subseteq Y$, $\mathcal{O}(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{P,Y}$.

□

Proposition 1.4.12. :

Soit X une courbe abstraite non singulière, $P \in X$, Y une variété projective et $\phi : X \setminus P \longrightarrow Y$ un morphisme.

Alors il existe une unique extension $\bar{\phi} : X \longrightarrow Y$ de $\phi : X \setminus P \longrightarrow Y$ à X tout entier.

Preuve. :

On considère Y comme un sous ensemble fermé de $\mathbb{P}^n$ pour un certain n .

Alors il suffit de montrer que ϕ se prolonge en un morphisme de X dans $\mathbb{P}^n$.

En effet, si c'est le cas l'image sera alors contenue dans Y et on aura le résultat souhaité.

On va procéder par récurrence sur n .

Soient $x_0, \dots, x_n$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^n$ et U un ouvert où $x_0, \dots, x_n$ ne s'annulent pas.

On peut supposer que $\phi(X \setminus P) \cap U \neq \emptyset$ car si $\phi(X \setminus P) \cap U = \emptyset$ alors $\phi(X \setminus P) \subseteq \mathbb{P}^n \setminus U$.

Mais $\mathbb{P}^n \setminus U$ est l'union des hyperplans H_i définis par $x_i = 0$.

Puisque $\phi(X \setminus P)$ est irréductible, il est contenu dans H_i pour un certain i .

Maintenant $H_i \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ donc le résultat s'obtient grâce à l'hypothèse de récurrence.

On suppose donc que $\phi(X \setminus P) \cap U \neq \emptyset$.

Pour chaque i, j x_i/x_j est une fonction régulière sur U .

En composant avec ϕ , on obtient une fonction régulière f_{ij} sur un sous ensemble ouvert de X , ce qui peut être vu comme une fonction rationnelle sur X c'est à dire $f_{ij} \in K$, où K est le corps des fonctions de X .

Soit v la valuation de K associée à l'anneau de valuation R_P .

Soit $r_i = v(f_{i0}), i, \dots, n, r_i \in \mathbb{Z}$.

Alors puisque $\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{x_i}{x_0}\right)\left(\frac{x_j}{x_0}\right)^{-1}$ on obtient :

$$v(f_{ij}) = r_i - r_j \quad i, j = 0, \dots, n$$

On choisit k tel que r_k est minimal parmi $r_0, \dots, r_n$.

Alors $v(f_{ik}) \geq 0$ pour tout i donc $f_{0k}, \dots, f_{nk} \in R_P$.

Maintenant on définit $\bar{\phi}(P) = (f_{0k}(P), \dots, f_{nk}(P))$, et $\bar{\phi}(Q) = \phi(Q)$ pour $Q \neq P$.
 $\bar{\phi}$ est un morphisme de X dans $\mathbb{P}^n$ qui prolonge ϕ et $\bar{\phi}$ est unique.

L'unicité est claire par construction.

Pour montrer que $\bar{\phi}$ est un morphisme, il suffit de montrer que les fonctions régulières dans un voisinage de $\bar{\phi}(P)$ sont envoyées par $\phi^* = \phi^*$ sur des fonctions régulières sur X .

Soit $U_k \subseteq \mathbb{P}^n$ les ensembles ouverts où $x_k \neq 0$.

Alors $\bar{\phi}(P) \in U_k$, puisque $f_{kk}(P) = 1$.

Maintenant U_k est affine, avec l'anneau des coordonnées affines égal à

$$k\left[\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}\right]$$

Ces fonctions composées avec ϕ sont les $f_{0k}(P), \dots, f_{nk}(P)$ donc sont régulières en P par construction.

Il suit immédiatement que pour chaque voisinage plus petit $\bar{\phi}(P) \in V \subseteq U_k$, les fonctions régulières sur V composées avec ϕ sont les fonctions régulières de X .

On en déduit que $\bar{\phi}$ est un morphisme ce qui complète la preuve. $\square$

Théorème 1.4.13. :

Soit K un corps de fonction de dimension 1 sur k . Alors la courbe abstraite non singulière C_K définie précédemment est isomorphe à une courbe projective non singulière.

Preuve. :

Pour démontrer ce théorème on recouvre $C = C_k$ avec des ensembles ouverts U_i isomorphes à des courbes affines non singulières.

Soit Y_i la clôture projective de la courbe affine U_i . Alors en utilisant la proposition précédente on définit un morphisme $\phi_i : C \rightarrow Y_i$.

Ensuite, on considère l'application produit $\phi : C \rightarrow \prod Y_i$ et soit Y la clôture de l'image de C .

Alors Y est une courbe projective et on va montrer que ϕ est un isomorphisme de C dans Y .

Soit $P \in C$ un point quelconque. Alors d'après le corollaire 1.4.8 il existe une courbe affine V non singulière et un point $Q \in V$ avec $R_P \cong \mathcal{O}_Q$.

On en déduit que le corps de fonction de V est F , et d'après la proposition 1.4.11 que V est isomorphe à un sous ensemble ouvert de C .

Ainsi, on a montré que chaque point $P \in C$ a un voisinage ouvert qui est isomorphe à une variété affine.

Puisque C est quasi-compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de sous-ensembles ouverts U_i isomorphes à une variété affine V_i .

Puisque $V_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}$, on considère $\mathbb{A}^{n_i}$ comme un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{P}^{n_i}$ et Y_i la clôture de V_i dans $\mathbb{P}^{n_i}$.

Alors Y_i est une variété projective et on a un morphisme $\phi_i : U_i \rightarrow Y_i$ qui est un isomorphisme de U_i sur son image.

En appliquant la proposition 1.4.12 à l'ensemble de points $C \setminus U_i$ (qui est fini), on construit le morphisme $\bar{\phi}_i : C \rightarrow Y_i$ extension de ϕ_i . Alors $\prod Y_i$ est une variété projective comme produit de variétés projectives.

Soit $\phi : C \rightarrow \prod Y_i$ l'application "diagonale" $\phi(P) = \prod \bar{\phi}_i(P)$, et soit Y la clôture de l'image de ϕ .

Alors Y est une variété projective, et $\phi : C \rightarrow Y$ est un morphisme dont l'image est dense dans Y (Y est donc une courbe).

Maintenant, montrons que ϕ est un isomorphisme. Pour chaque point $P \in C$, on a $P \in U_i$ pour un certain i .

Il y a donc un diagramme commutatif de morphismes dominants :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \uparrow & & \downarrow \\ U_i & \xrightarrow{\phi_i} & Y_i \end{array}$$

où $\pi : Y \rightarrow Y_i$ est la projection sur le i^{eme} facteur.

Ainsi nous avons l'inclusion d'anneaux locaux :

$$\mathcal{O}_{\phi_i(P), Y_i} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\phi(P), Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P, C}$$

$\mathcal{O}_{\phi_i(P), Y_i}$ et $\mathcal{O}_{P, C}$ sont isomorphes, donc $\mathcal{O}_{\phi(P), Y}$ aussi.

Ainsi, pour chaque $P \in C$, l'application $\phi^* : \mathcal{O}_{\phi(P), Y} \rightarrow \mathcal{O}_{P, C}$ est un isomorphisme.

Soit Q un point de Y .

Alors $\mathcal{O}_Q$ est dominé par un anneau de valuation discrète R de K/k .

Mais $R = R_P$ pour un $P \in C$ et $\mathcal{O}_{\phi(P)} \cong R$ donc d'après le lemme 1.4.6 on a $Q = \phi(P)$.

Ce qui montre que ϕ est surjective.

Mais ϕ est clairement injective car différents points de C correspondent à différents sous anneaux de K .

Ainsi ϕ est un morphisme bijectif de C dans Y , et pour chaque $P \in C$, ϕ_P^* est un isomorphisme donc ϕ est un isomorphisme. $\square$

Les corollaire qui suivent ne sont pas démontrer, ils font ici office de récapitulatif.

Corollaire 1.4.14. *Toute courbe abstraite non singulière est isomorphe à une courbe quasi-projective. Toute courbe non singulière quasi-projective est isomorphe à un sous-ensemble ouvert d'une courbe projective non singulière.*

Corollaire 1.4.15. *Toute courbe est birationnellement équivalente à courbe projective non singulière.*

Dans un langage catégorique, on peut reformuler les résultats précédents comme suit :

Les trois catégories suivantes sont équivalentes :

- a. les courbes projectives non singulières et les morphismes dominants ;
- b. les courbes quasi-projectives et les applications rationnelles dominantes ;
- c. les corps de fonctions de dimension 1 sur k et les k -homomorphismes.

Chapitre 2

Le théorème de Riemann Roch

Nous avons vu précédemment la théorie de la valuation [1], dans cette partie nous l'utiliser pour démontrer le théorème de Riemann Roch. Nous commençons par définir le groupe des diviseurs et ses propriétés.

2.1 Les diviseurs

Le corollaire 1.1.16 établit que le corps $\tilde{K}$ des constantes d'un corps de fonctions F/K est une extension de corps finie de K et par une remarque qui le succédait on a établi que F pouvait être considéré comme un corps de fonctions de corps des constantes $\tilde{K}$. Dans ce qui suit, on supposera donc que $K = \tilde{K}$.

Définition 2.1.1. :

– **Le groupe des diviseurs :**

*Le groupe (additif) libre abélien qui est engendré par les places de F/K noté D_F est appelé le **groupe des diviseurs de F/K** .*

*Les éléments de D_F sont appelés les **diviseurs** de F/K . En d'autres termes, un diviseur est une somme formelle :*

$$D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P \text{ avec } n_P \in \mathbb{Z} \text{ et } n_P = 0 \text{ pour presque tout } P \in \mathbb{P}_F$$

*Un diviseur de la forme $D = P$ avec $P \in \mathbb{P}_F$ est appelé **diviseur premier**.*

– **Addition sur les diviseurs :**

Soient deux diviseurs $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ et $D' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n'_P P$ alors on a : $D + D' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} (n_P + n'_P) P$

– **Elément neutre :**

L'élément nul du groupe diviseur est le diviseur :

$$0 := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} r_P P \text{ avec } r_P = 0 \text{ pour presque tout } P \in \mathbb{P}_F$$

– **Le support d'un diviseur :**

Le **support de D** est défini par : $\text{supp } D := \{P \in \mathbb{P}_F \mid n_P \neq 0\}$

Il sera souvent utile d'écrire D sous la forme : $D = \sum_{P \in S} n_P P$ où $S \subseteq \mathbb{P}_F$ est un ensemble fini avec $\text{supp } D \subseteq S$

– **Notation :**

Par abus de notation, pour $Q \in \mathbb{P}_F$ et $D = \sum n_P P \in D_F$ on définit $v_Q(D) := n_Q$
On a alors :

$$\text{supp } D = \{P \in \mathbb{P}_F \mid v_P(D) \neq 0\} \text{ et } D = \sum_{P \in \text{supp } D} v_P(D).P$$

– **Une relation d'ordre sur les diviseurs :**

On définit une **relation d'ordre sur D_F** par :

$$D_1 \leq D_2 \iff v_P(D_1) \leq v_P(D_2) \quad \forall P \in \mathbb{P}_F$$

– **Diviseur positif :**

Un diviseur $D \geq 0$ est dit **positif**.

Notons D_+ l'ensemble des diviseurs positifs.

– **Degré d'un diviseur :**

Le **degré** d'un diviseur est défini par $\deg D := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D). \deg P$ et on a un homomorphisme $\deg : D_F \longrightarrow \mathbb{Z}$

Par le corollaire 1.3.4 un élément non nul $x \in F$ a un nombre fini de zéros et de pôles dans $\mathbb{P}_F$.
Donc la définition suivante a un sens.

Définition 2.1.2. :

Soit $x \neq 0 \in F$, on pose Z (resp. N) l'ensemble des zéros (resp. des pôles) de x dans $\mathbb{P}_F$.

Alors on définit :

- **Le diviseur des zéros de x** : $(x)_0 := \sum_{P \in Z} v_P(x).P$
- **Le diviseur des pôle de x** : $(x)_\infty := \sum_{P \in N} (-v_P(x)).P$
- **Le diviseur principal de x** : $(x) := (x)_0 - (x)_\infty$

Remarque 2.1.3. :

a. On montre facilement que :

$$(x)_0 \geq 0, (x)_\infty \geq 0 \text{ et } (x) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(x)P$$

b. Les éléments $0 \neq x \in F$ qui sont constants sont caractérisés par : $x \in K \iff (x) = 0$ puisque $K = \tilde{K}$

(Notons que cette équivalence n'est valable que si K est algébriquement clos dans F).

c. Si $u, v \in L^*$, on a $(uv) = (u) + (v)$ et $(\frac{u}{v}) = (u) - (v)$, en particulier $(\frac{1}{v}) = -(v)$

L'ensemble des diviseurs principal forment un sous groupes de l'ensemble des diviseurs.

On peut maintenant définir la notion de groupe de diviseurs principaux et de groupe des classes des diviseurs

Définition 2.1.4. :

- **Groupe des diviseurs principaux de F/K** :

On a $\forall x, y \in F \setminus \{0\} (xy) = (x) + (y)$. D'où un morphisme de groupe $(\) : F \setminus \{0\} \rightarrow D_F$.
 $P_F = \text{Im}(\) < D_F$ est appelé le sous-groupe des diviseurs principaux de F/K .

- **Le groupe des classe des diviseurs** :

Le groupe quotient $C_F := \frac{D_F}{P_F}$ est appelé le groupe des classes des diviseurs.

Pour un diviseur $D \in D_F$ l'élément correspondant dans le groupe quotient C_F est la classe des diviseurs de D notée $[D]$.

On a donc une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow P_F \rightarrow D_F \rightarrow C_F \rightarrow 0$$

- **Equivalence de deux diviseurs** :

Deux diviseurs sont équivalents et on note $D \sim D'$ si :

$$[D] = [D'] \text{ i.e } D = D' + (x) \text{ pour tout } x \in F \setminus \{0\}$$

Grâce à la description du groupe des diviseurs principaux de F/K , on voit que l'on a une relation d'équivalence.

Nous pouvons maintenant définir l'ensemble dont il est sujet dans le théorème de Riemann Roch.

2.2 Etude de $\mathcal{L}(A)$ et de sa dimension

2.2.1 Définition

La définition suivante joue un rôle fondamental dans la théorie des corps de fonctions.

Définition 2.2.1. *Pour un diviseur $A \in D_F$ on a :*

$$\mathcal{L}(A) := \{x \in F \mid (x) \geq -A\} \cup \{0\}$$

Conséquence de la définition :

Si $A = \sum_{i=1}^r n_i \cdot P_i - \sum_{j=1}^s m_j \cdot Q_j$ avec $n_i > 0, m_j > 0$ pour tout $i = 1 \dots r$ et $j = 1 \dots s$ où $\{Q_1, \dots, Q_s\} \cap \{P_1, \dots, P_r\} = \emptyset$ alors $\forall u \in F$

$$u \in \mathcal{L}(D) \iff (u)_0 - (u)_\infty \geq \sum_{j=1}^s m_j \cdot Q_j - \sum_{i=1}^r n_i \cdot P_i$$

car $(u)_\infty \leq \sum_{i=1}^r n_i \cdot P_i$ et $(u)_0 \geq \sum_{j=1}^s m_j \cdot Q_j$

Autrement dit, $\mathcal{L}(A)$ contient tous les éléments $x \in F$ tels que :

- x a un zéro d'ordre $\geq m_j$ en Q_j pour $j = 1, \dots, s$
- x peut seulement avoir des pôles en les places $P_1, \dots, P_s$ avec l'ordre du pôle de P_i majoré par n_i pour $i = 1, \dots, r$

Remarque 2.2.2. :

Soit $A \in D_F$. Alors :

a. *On a pour tout $u \in F$:*

$$u \in \mathcal{L}(A) \iff (u) \geq -A \iff v_P(u) \geq -v_P(A), \forall P \in \mathbb{P}_F$$

b. *$\mathcal{L}(A) \neq 0$ si et seulement si il y a un diviseur $A' \sim A$ avec $A' \geq 0$*

En effet, si $u \in \mathcal{L}(A) \setminus \{0\}$, on a $A' := A + (u) \geq 0$ et $A' \sim A$.

Réciproquement, s'il existe un diviseur $A' \geq 0$ tel que $A' \sim A$ alors il existe $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $A' = A + (x) \geq 0$ c'est à dire $x \in \mathcal{L}(A) \setminus \{0\}$.

En fait, il s'agit de montrer ce résultat :

Il existe un entier positif appelé genre de F/K et noté g et une classe de diviseurs appelée classe canonique et notée $\mathcal{W}_{F/K}$ tels que pour tout $W \in \mathcal{W}_{F/K}$ et pour tout $A \in D_F$, $\dim \mathcal{L}(A) = \deg A + 1 - g + \dim(W - A)$ (théorème de Riemann).

On va procéder de ma manière suivante.

Nous allons d'abord montrer ici que $\mathcal{L}(A)$ est un K espace vectoriel afin de pouvoir définir sa dimension et montrer qu'elle est finie, ce qui sera déjà un petit pas vers le théorème de Riemann Roch.

Nous allons ensuite établir une majoration de $\dim \mathcal{L}(A) - \deg A$ qui va nous mener à la définition du genre et au théorème de Riemann déjà très proche du théorème de Riemann Roch que l'on c'est donné pour but d'établir en effet on montre par ce théorème qu'il existe un entier c , dépendant de F/K tel que : $\dim \mathcal{L}(A) = \deg A + 1 - g$ dès que $\deg A \geq c$.

2.2.2 Propriétés de $\mathcal{L}(A)$

Lemme 2.2.3. :

Soit $A \in D_F$ alors on a :

- a. $\mathcal{L}(A)$ est un espace vectoriel sur K
- b. Si A' est un diviseur équivalent à A alors $\mathcal{L}(A) \simeq \mathcal{L}(A')$ (isomorphisme d'espaces vectoriels sur K).

Preuve. :

- a. On va donc montrer que $\mathcal{L}(A)$ est un sous espace vectoriel de F sur K i.e $\forall x, y \in \mathcal{L}(A)$ et $\forall a \in K$, $x + y \in \mathcal{L}(A)$ et $ax \in \mathcal{L}(A)$
Soient $x, y \in \mathcal{L}(A)$ et $a \in K$. Alors pour tout $P \in \mathbb{P}_F$ on a :
 $v_P(x + y) \geq \min(v_P(x), v_P(y)) \geq -v_P(A)$ et $v_P(ax) \geq v_P(a) + v_P(x) = v_P(x) \geq -v_P(A)$
donc $x + y$ et ax sont dans $\mathcal{L}(A)$.

- b. Supposons que $A \sim A'$ c'est à dire que $A = A' + (z)$ avec $0 \neq z \in F$.

$$\text{Soit donc } \varphi := \begin{cases} \mathcal{L}(A) & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto xz \end{cases}$$

C'est une application K -linéaire et injective.

De plus, $\forall x \in \mathcal{L}(A)$, $(xz) = (x) + (z) \geq -A + (z) = -(A - (z)) = -A'$ donc $\text{Im} \varphi \subset \mathcal{L}(A')$
donc $\dim_k \mathcal{L}(A) \leq \dim_k \mathcal{L}(A')$

De même, on considère $\varphi' := \begin{cases} \mathcal{L}(A') & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto xz^{-1} \end{cases}$ on obtient $\text{Im} \varphi' \subset \mathcal{L}(A)$ et $\dim_k \mathcal{L}(A') \leq \dim_k \mathcal{L}(A)$.

Donc $\dim_k \mathcal{L}(A') = \dim_k \mathcal{L}(A)$, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$ et $\varphi|_{\mathcal{L}(A)}$, $\varphi'|_{\mathcal{L}(A')}$ sont des isomorphismes de K -espace vectoriel inverses l'une de l'autre.

□

Lemme 2.2.4. :

- a. $\mathcal{L}(0) = K$
- b. si $A < 0$ alors $\mathcal{L}(A) = \{0\}$

Preuve. :

- a. $\mathcal{L}(0) = K$ en effet

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(0) &\iff x = 0 \quad \text{où } (x) \geq 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{où } x \text{ n'as pas de pôles} \\ &\iff x \in K. \end{aligned}$$

- b. Supposons qu'il existe un élément $0 \neq x \in \mathcal{L}(A)$.

Alors $(x) \geq -A > 0$ ce qui implique que x a au moins un zéro mais pas de pôles ce qui est impossible.

□

On a vu que $\mathcal{L}(A)$ était un K-espace vectoriel. Le lemme suivant montre que $\mathcal{L}(A)$ est de dimension finie pour tout $A \in D_F$.

Lemme 2.2.5. :

Soient A, B des diviseurs de F/K avec $A \leq B$. Alors on a :

$$\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B) \text{ et } \dim\left(\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}\right) \leq \deg B - \deg A$$

Preuve. :

Déjà $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$.

En effet comme $A \leq B$ si $(x) + A \geq 0$ on a $(x) + B \geq 0$.

Pour prouver l'autre assertion, on écrit $B = A + A_0$ avec $A_0 \geq 0$

On fait une récurrence sur le nombre de places du support de A_0 .

On suppose que $B = A + P$ pour un $P \in \mathbb{P}_F$.

On choisit un élément $t \in F$ avec $v_P(t) = v_P(B) = v_P(A) + 1$ (par exemple $u = t_P^{v_P(B)}$).

Pour $x \in \mathcal{L}(B)$ on a $v_P(x) \geq -v_P(B) = -v_P(t)$ ainsi $v_P(xt) = v_P(x) + v_P(t) \geq 0$ donc $xt \in \mathcal{O}_P$.

Alors on obtient une application K-linéaire :

$$\phi := \begin{cases} \mathcal{L}(B) & \longrightarrow F_P := \frac{\mathcal{O}_P}{P} \\ x & \longmapsto (xt)(P) \end{cases}$$

Montrons que $\text{Ker } \phi = \mathcal{L}(A)$

Si $x \in \mathcal{L}(B) \setminus \{0\}$ on a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } \phi &\iff v_P(xt) > 0 \\ &\iff v_P(x) > -v_P(t) = -v_P(A) - 1 \\ &\iff v_P(x) \geq -v_P(A) \end{aligned}$$

Comme

$$x \in \mathcal{L}(B) \setminus \{0\} \iff v_{P'}(x) \geq -v_{P'}(B), \forall P' \in \mathbb{P}_F$$

On obtient :

$$x \in \text{Ker } \phi \setminus \{0\} \iff \begin{cases} v_{P'}(x) \geq -v_{P'}(B) = -v_{P'}(A), \forall P' \in \mathbb{P}_F, P \neq P' \\ v_P(x) \geq -v_P(A) \end{cases}$$

$$x \in \text{Ker } \phi \iff x \in \mathcal{L}(A).$$

Par conséquent $\text{Ker}(\phi) = \mathcal{L}(A)$ et ϕ induit une application K -linéaire injective de $\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}$ dans F_P .

Il suit que : $\dim \left(\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)} \right) \leq \dim F_P = \deg P = \deg B - \deg A$.

Par récurrence sur le nombre de places du support de A_0 on montre que c'est vrai quelque soit A_0 . $\square$

Remarque 2.2.6. :

On peut maintenant reformuler le lemme précédent et écrire :

$$B \geq A \implies 0 \leq \dim \mathcal{L}(B) - \dim \mathcal{L}(A) \leq \deg B - \deg A$$

On va voir que $\mathcal{L}(A)$ est toujours de dimension finie. Notre objectif sera ensuite de calculer $\dim \mathcal{L}(A)$ en fonction de $\deg A$ et de deux invariants liés à F/K : son genre g et sa classe canonique $\mathcal{W}_{F/K}$. Dans un premier temps, nous allons majorer $\deg A - \dim A$ par une constante γ ne dépendant que de F/K .

2.2.3 Dimension de $\mathcal{L}(A)$ et majoration

Définition 2.2.7. :

Pour tout diviseur $A \in D_F$,

l'entier $\dim A := \dim \mathcal{L}(A)$ est appelé la **dimension du diviseur** A .

Proposition 2.2.8. :

Pour tout diviseur $A \in D_F$, l'espace $\mathcal{L}(A)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K .

Plus précisément : si $A = A_+ - A_-$ avec les diviseurs positifs A_+ et A_- alors :

$$\dim \mathcal{L}(A) \leq \deg A_+ + 1$$

Preuve. :

De $A = A_+ - A_-$ on en déduit $A \leq A_+$ donc $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(A_+)$ il suffit donc de montrer que $\dim \mathcal{L}(A_+) \leq \deg A_+ + 1$.

Comme $0 \leq A_+$ par le lemme 2.2.5 on a $\dim \left(\frac{\mathcal{L}(A_+)}{\mathcal{L}(0)} \right) \leq \deg A_+$. Comme $\mathcal{L}(0) = K$ on a $\dim \mathcal{L}(0) = 1$ d'où

$$\dim \mathcal{L}(A) \leq \dim \mathcal{L}(A_+) = 1 + \dim \left(\frac{\mathcal{L}(A_+)}{\mathcal{L}(0)} \right) \leq \deg A_+ + 1$$

Par suite, l'espace $\mathcal{L}(A)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K . Ceci achève la démonstration de notre proposition. $\square$

L'un des plus important problème dans la théorie des corps de fonctions est de calculer la dimension d'un diviseur.

Théorème 2.2.9. :

Tout diviseur principal est de degré 0.

Plus précisément, soit $x \in F/K$ et soient $(x)_0$ et $(x)_\infty$ respectivement les diviseurs des zéros et les diviseurs des pôles de x . Alors :

$$\deg (x)_0 = \deg (x)_\infty = [F : K(x)]$$

Preuve. :

Si $x \in K \setminus \{0\}$, $(x) = 0$ et le résultat est vrai.

Si $x \in F \setminus K$ on pose $n := [F : K(x)]$.

Soit le diviseur positif $B := (x)_\infty = -\sum_{i=1}^r v_i(x) P_i$ avec $v_i(x) < 0$, $\forall i$.

On a donc $(x) = (x)_0 - (x)_\infty \geq -B$ et $\deg B \leq n$ puisque (par la proposition 1.1.15) :

$$\deg B = -\sum_{i=1}^r v_i(x) \deg P_i = \sum_{i=1}^r v_i(x^{-1}) \deg P_i \leq [F : K(x^{-1})] = [F : K(x)] = n$$

les P_i étant les zéros de x^{-1} .

Montrons à présent que $\deg B \geq n$. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base de F sur $K(x)$ et $A \in D_+$

un diviseur positif tel que $u_j \in \mathcal{L}(A)$ pour tout j (un tel diviseur existe, il suffit de prendre $A := \sum_{j=1}^n (u_j)_\infty$). Pour tout entier $s \geq 0$, les $x^i u_j$ sont dans $\mathcal{L}(sB + A)$ pour tous $0 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq n$. En effet :

$$\forall s \in \mathbb{N}, (x^i u_j) = i(x) + (u_j) \geq -iB - A \geq -(sB + A)$$

Alors $\{x^i u_j, \text{ pour } 0 \leq i \leq s \text{ et } 1 \leq j \leq n\}$ est un système libre du K -espace vectoriel $\mathcal{L}(sB + A)$ (puisque les u_j sont libres sur $K(x)$) formé de $(s+1)n$ éléments. D'où en appliquant la proposition 2.2.8 au diviseur positif $sB + A$, on a :

$$\forall s \in \mathbb{N} \deg(sB + A) + 1 \geq \dim \mathcal{L}(sB + A) \geq (s+1)n$$

donc

$$\forall s \in \mathbb{N} s(\deg B - n) \geq n - 1 - \deg A.$$

Le deuxième membre ne dépend pas de s , donc on ne peut avoir $\deg B - n < 0$ car sinon l'inégalité précédente ne serait pas vraie pour tout entier s . Or on a vu que $\deg B \leq n$ donc nécessairement $\deg B = \deg(x)_\infty = n = [F : K(x)]$. Comme $(x)_0 = (x^{-1})_\infty$ on montre de la même façon que $\deg(x)_0 = [F : k(x)] = n$. $\square$

Corollaire 2.2.10. :

- a. Soit A et A' des diviseurs tels que $A \sim A'$. Alors on a :
 $\dim A = \dim A'$ et $\deg A = \deg A'$
- b. Si $\deg A < 0$ alors $\dim A = 0$
- c. Pour un diviseur A de degré 0 les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est principal
- (b) $\dim A \geq 1$
- (c) $\dim A = 1$

Preuve. :

- a. Si $A \sim A' \Leftrightarrow \exists u \in F$ tel que $A - A' = (u)$ d'où $\deg A = \deg A'$ parce que $\deg(u) = 0$.
 $\dim \mathcal{L}(D) = \dim \mathcal{L}(D')$ résulte du lemme 2.2.3 (b).
- b. Supposons que $\dim A > 0$. Alors il existe $A' \sim A$ tel que $A' \geq 0$ et donc $\deg A = \deg A' \geq 0$ d'où une contradiction.
- c. Soit A tel que $\deg A = 0$.
 Si $A = 0$, $A = (\lambda)$, où $\lambda \in K$, est principal et $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{L}(0) = 1$.
 Supposons maintenant que $A \neq 0$
 - (a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que $A = (x)$ est principal avec $x \in F \setminus K$ alors $x^{-1} \in \mathcal{L}(A)$ et $\dim A \geq 1$
 - (b) $\Rightarrow$ (c) : On suppose maintenant que $\dim A \geq 1$, on sait que $\deg A = 0$. Alors $A \sim A'$ pour $A' \geq 0$. Les conditions $A' \geq 0$ et $\deg A' = \deg A = 0$ implique que $A' = 0$ donc par le lemme 2.2.4 on a $\dim A = \dim A' = \dim 0 = 1$
 - (c) $\Rightarrow$ (a) : Supposons $\dim A = 1$ et on sait que $\deg A = 0$. Choisissons $0 \neq z \in \mathcal{L}(A)$ alors $(z) + A \geq 0$. Alors $\deg((z) + A) = 0$ et il vient $(z) + A = 0$ donc $A = -(z) = (z^{-1})$ est principal.

□

Exemple 2.2.11. :

Encore une fois, on considère le corps des fonctions rationnelles $F = K(x)$ comme à la partie 1.2.

Pour $0 \neq z \in K(x)$ on a $z = a \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $a \in K \setminus \{0\}$, $f(x), g(x) \in K[x]$ et premiers entre eux.

Notons $f(x) = \prod_{i=1}^r p_i(x)^{n_i}$ et $g(x) = \prod_{j=1}^s q_j(x)^{m_j}$ avec $p_i(x)$ et $q_j(x) \in K[x]$ des polynômes irréductibles.

Alors le diviseur principal de z dans $D_{K(x)}$ est :

$$(z) = \sum_{i=1}^r n_i P_i - \sum_{j=1}^s m_j Q_j + (\deg g - \deg f) P_\infty$$

où P_i respectivement Q_j sont les places correspondantes aux $p_i(x)$ et $q_j(x)$.

Dans un corps de fonctions arbitraires, les diviseurs principaux servent de substitut à la décomposition en polynômes irréductibles qui existe dans le corps des fonctions rationnelles.

En particulier, $\forall x, y \in F$ si x et y ont les mêmes zéros et les mêmes pôles alors $(xy^{-1}) = 0$ donc $\exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que $\lambda y = x$:

essentiellement une fonction est uniquement déterminée (à multiplication par un scalaire non nul près) par ses zéros et ses pôles.

Dans la proposition 2.2.8, on a vu que :

$$\dim A \leq 1 + \deg A \text{ pour tout diviseur } A \geq 0. \quad (2.1)$$

En fait cette inégalité est vraie pour des diviseurs arbitraires de degré ≥ 0 . Pour vérifier cela, on suppose que $\dim A > 0$. Alors $A \sim A'$ pour $A' \geq 0$ par la remarque 2.2.1 b) et on a donc par le corollaire 2.2.10 :

$\dim A = \dim A' \leq 1 + \deg A' = 1 + \deg A$ (la première inégalité se déduit de la proposition 2.2.8 et la seconde égalité se déduit du corollaire 2.2.10 a))

Proposition 2.2.12. :

Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout diviseur $D \in D_F$, $\deg D - \dim D < \gamma$

Il semblerait dans cette proposition que γ est dépendant de D mais il dépend seulement du corps des fonctions F/K .

Preuve. :

Soit $x \in F/K$ et posons $B :=_\infty$.

D'après la théorème 2.2.9, $\deg B = [L : K]$.

Comme dans la preuve de ce théorème on peut trouver un diviseur $A \geq 0$ (dépendant de x) tel que $\dim \mathcal{L}(sB + A) \geq (s+1)\deg B$ pour $s \geq 0$.

D'autre part (voir remarque 2.2.6) $\dim \mathcal{L}(sB + A) - \dim \mathcal{L}(sB) \leq \deg A$. On en déduit que :

$$\dim \mathcal{L}(sB) \geq (s+1)\deg B - \deg A = \deg(sB) + [L : K] - \deg A$$

Soit

$$\forall s \geq 0, \deg(sB) - \dim \mathcal{L}(sB) \leq \gamma := \deg A - [L : K].$$

Montrons maintenant que ci c'est vrai pour sB c'est vrai pour tout diviseur D .

On se ramène d'abord à un diviseur positif.

Soit $D_1 \geq 0$ tel que $D \leq D_1$ (par exemple $D_1 = D^+$).

Alors $\dim \mathcal{L}(sB) - \dim \mathcal{L}(sB - D_1) \leq \deg D_1$.

Par suite, si s est un entier suffisamment grand pour que $\deg(sB) - \gamma - \deg D_1 > 0$, on a :

$$\dim \mathcal{L}(sB - D_1) \geq \dim \mathcal{L}(sB) - \deg D_1 \geq \deg(sB) - \gamma - \deg D_1 > 0.$$

Donc, pour un tel s , il existe $u \in \mathcal{L}(sB - D_1)$ non nul tel que $-D_1 \geq -sB$ d'après la définition de $\mathcal{L}(sB - D_1)$, et si $D_0 := D_1 -$ on a $D_1 \sim D_0$ et $D_0 \leq sB$, par le corollaire 2.2.10, on a $\deg D_1 = \deg D_0 \leq \deg(sB)$ et $\dim \mathcal{L}(D_0) = \dim \mathcal{L}(D_1)$.

Comme $D \leq D_1$ on a :

$$\deg D - \dim \mathcal{L} \leq \deg D_1 - \dim \mathcal{L}(D_1) = \deg D_0 - \dim \mathcal{L}(D_0) \leq \deg sB - \dim \mathcal{L}(sB) \leq c.$$

d'après la remarque 2.2.6. □

2.3 Genre d'un corps de fonction et théorème de Riemann

On commence ici par définir la notion de genre.

Définition 2.3.1. :

Le **genre** g de F/K est défini par :

$$g := \max \{ \deg A - \dim A + 1 \mid A \in D_F \}$$

On observe que cette définition prends du sens par la proposition 2.2.12, en effet on a l'ensemble $\{ \deg A - \dim A + 1 \mid A \in D_F \}$ est non vide et majorée par $\gamma + 1$.

Nous notons ici que le genre est l'invariant le plus important du corps des fonctions.

Remarque 2.3.2. :

Le genre de F/K est un entier positif.

En effet, par définition de g , posons $A = (0)$. Alors $\deg (0) - \dim (0) + 1 = 0$ donc $g \geq 0$.

Théorème 2.3.3 (Théorème de Riemann). :

Soit F/K un corps des fonctions de genre g

- Pour tout diviseur $A \in D_F$ on a $\dim A \geq \deg A + 1 - g$
- Il existe un entier c , ne dépendant que de F/K tel que $\dim A = \deg A + 1 - g$ dès que $\deg A \geq c$

Preuve. :

- C'est juste une conséquence de la définition du genre et de la remarque 2.3.2 $g \geq \deg A - \dim A + 1 \forall A \in D_F$
- On choisit un diviseur A_0 avec $g = \deg A_0 - \dim A_0 + 1$ et on pose $c := \deg A_0 + g$
Si $\deg A \geq c$ alors :

$$\dim (A - A_0) \geq \deg (A - A_0) + 1 - g \geq c - \deg A_0 + 1 - g \geq 1$$

car $c - \deg A_0 - g = 0$ et par le a.

Donc il existe un élément $0 \neq z \in \mathcal{L}(A - A_0)$ et on considère le diviseur $A' = A + (z) \geq A_0$ on a :

$$\begin{aligned} \deg A - \dim A &= \deg A' - \dim A' && (\text{corollaire 2.2.10 car } A' \sim A \text{ et } z \in F \setminus \{0\}) \\ &\geq \deg A_0 - \dim A_0 && (\text{par le lemme 2.2.6}) \\ &= g - 1 && (\text{car } g = \deg A_0 - \dim A_0 + 1) \end{aligned}$$

Alors : $\dim A \leq \deg A + 1 - g$

□

Exemple 2.3.4. :

On veut montrer que le corps des fonctions rationnelles $K(x)/K$ a pour genre $g = 0$. Pour prouver cela, on note P_∞ le diviseur pôle de x . On considère, pour $r \geq 0$, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(rP_\infty)$. Evidemment les éléments $1, x, \dots, x^r$ sont dans $\mathcal{L}(rP_\infty)$ et on a alors pour $r \geq \gamma$: $r + 1 \leq \dim(rP_\infty) = \deg(rP_\infty) + 1 - g = r + 1 - g$ donc, nécessairement, $g \leq 0$.

Mais, par ailleurs, on a toujours $g \geq 0$ donc $g = 0$.

2.4 Le théorème de Riemann Roch

Nous devons encore introduire quelques notions et petits résultats associés à ces notions avant d'attaquer la démonstration du théorème de Riemann Roch en elle même.

On va considérer un corps de fonctions de genre g .

2.4.1 Index de spécialité et répartition

Définition 2.4.1. :

Pour $A \in D_F$

$$i(A) := \dim A - \deg A + g - 1$$

est appelé **l'index de spécialité** de A .

Par le théorème de Riemann de la partie précédente, $i(A) = \dim A - \deg A + g - 1 \geq 0$ et $i(A) = 0$ si $\deg A$ est suffisamment grand. Nous allons voir différentes interprétations de $i(A)$ en tant que dimension de certains espaces vectoriels.

Définition 2.4.2. :

Une **répartition de F/K** est une application :

$$\alpha := \begin{cases} \mathbb{P}_F & \longrightarrow F \\ P & \longrightarrow \alpha_P \end{cases}$$

tel que $\alpha_P \in \mathcal{O}_P$ pour presque tout $P \in \mathbb{P}_F$.

Nous voyons une répartition comme un élément du produit direct $\prod_{P \in \mathbb{P}_F} F$ et on utilise alors la notation $\alpha := (\alpha_P)_{P \in \mathbb{P}_F}$ ou en abrégé, $\alpha = (\alpha_P)$.

L'ensemble : $A_F := \{ \alpha \mid \alpha \text{ est une répartition de } F/K \}$ est appelé l'espace de répartition de F/K .

Cet ensemble est une K -algèbre. L'addition, la multiplication par les éléments de K se font composante par composante. On peut aussi définir une multiplication des éléments de A_F par ceux de F en posant :

$$u \in F, \alpha \in A_F, u\alpha := \alpha_u \alpha = (u\alpha_P)_{P \in \mathbb{P}_F}.$$

La **répartition principale** d'un élément $x \in F$ est la répartition notée α_x dont tous les composants sont égaux à x (on note que cette définition à un sens par le corollaire 1.3.4. celle-ci est définie par l'application diagonale K -linéaire injective :

$$\Delta_F := \begin{cases} F & \hookrightarrow A_F \\ u & \alpha_u := (\dots, u, u, u, \dots) = (u)_{P \in \mathbb{P}_F} \end{cases}$$

La valuation v_P de F/K s'étend naturellement à A_F par : $v_P(\alpha) := v_P(\alpha_P)$ (où α_P est le P -composant de l'adèle α).

Par définition, $v_P(\alpha) \geq 0$ pour presque tous $P \in \mathbb{P}_F$.

Remarque 2.4.3. :

L'espace de répartition est vu de manière évidente comme un espace vectoriel sur K , (en fait on peut voir A_F comme un anneau, mais on n'utilisera pas la structure d'anneaux de A_F).

Définition 2.4.4. :

Pour $A \in D_F$, nous définissons :

$$A_F(A) := \{\alpha \in A_F \mid v_P(\alpha) \geq -v_P(A), \forall P \in \mathbb{P}_F\}$$

Remarquons que $\Delta_F(\mathcal{L}(D)) \subset A_F(D)$. En particulier, on a :

$$A_F(O) := \{\alpha := (\alpha_P)_{P \in \mathbb{P}_F} \in A_F \mid \alpha_P \in \mathcal{O}_P, \forall P \in \mathbb{P}_F\}$$

C'est bien sûr un sous espace vectoriel de A_F . En identifiant L et son image $\Delta_F(L)$ dans A_F , on considère le sous espace vectoriel de A_F

$$A_F(D) + F = \{\alpha + \alpha_u := (\alpha_u + u)_{P \in \mathbb{P}_F}, \alpha_P \in \mathcal{O}_P, \forall \alpha \in A_F(D) \text{ et } u \in L\}.$$

Les K -espaces vectoriels F , A_F et $A_F(D)$ sont de dimensions infinies. par contre on va montrer que $\frac{A_F}{A_F(D)+F}$ est de dimension finie.

Nous allons maintenant définir le concept de différentielle de Weil de F/K qui nous mènera à la seconde interprétation par les index de spécialité d'un diviseur.

2.4.2 Les différentielles de Weil

Définition 2.4.5. :

Une **différentielle de Weil de F/K** est une application K -linéaire $w : A_F \rightarrow K$ qui s'annule en $A_F(A) + F$ pour un diviseur $A \in D_F$.

En particulier $w(\alpha_x) = 0$ pour toute répartition principale α_x . Nous appelons :

$$\Omega_F := \{ w \mid w \text{ est une différentielle de Weil de } F/K \}$$

le module des différentielles de Weil de F/K .

Pour $A \in D_F$, soit $\Omega_F(A) := \{ w \in \Omega_F \mid w \text{ s'annule en } A_F(A) + F \}$.

Remarque 2.4.6. :

Ω_F est un K -espace vectoriel.

En effet, si $\omega_1 \in \Omega_F$ s'annule sur $A_F(D_1) + F$ et s'annule sur $A_F(D_1) + F$ et $\omega_2 \in \Omega_F$ s'annule sur $A_F(D_2) + F$ donc $\omega_1 + \omega_2$ s'annule sur $A_F(D_3) + F$ pour tout diviseur D_3 tel que $D_3 \leq D_1$ et $D_3 \leq D_2$ donc $\omega_1 + \omega_2 \in \Omega_F$ et si $a \in K$, $a\omega_1$ s'annule sur $A_F(D_1) + F$ donc $a\omega_1 \in \Omega_F$.

D'autre part, on a que $\Omega_F(A) \subset \Omega_F$ est un sous espace de Ω_F .

Le lemme qui suit donne une première interprétation de l'index de spécialité.

Lemme 2.4.7. :

Pour $A \in D_F$, nous avons alors $\dim \Omega_F(A) = i(A)$.

Preuve. :

$\Omega_F(A)$ est naturellement isomorphe à l'espace des formes linéaires sur $\frac{A_F}{A_F(A)+F}$.

Comme $\frac{A_F}{A_F(A)+F}$ est de dimension finie $i(A)$ notre lemme s'en suit immédiatement. $\square$

Remarque 2.4.8. :

Une conséquence simple de ce lemme 2.4.7 est que $\Omega_F \neq \{0\}$.

Pour voir cela, choisissons un diviseur A de degré ≤ -2 .

On a alors $\dim \Omega_F(A) = i(A) = \dim A - \deg A + g - 1 \geq 1$ ce qui revient à dire que $\Omega_F(A) \neq 0$.

On vient de voir que Ω_F est un K -espace vectoriel. On va montrer que Ω_F peut être muni d'une structure de F -espace vectoriel. Pour cela on définit une multiplication des éléments de Ω_F par ceux de F .

Définition 2.4.9. :

Pour $x \in F$ et $\omega \in \Omega_F$, on définit $x\omega : A_F \rightarrow K$ par :

$$(x\omega)(\alpha) := \omega(x\alpha)$$

Remarque 2.4.10. :

Cette application est une différentielle puisque, si ω s'annule sur $A_F(D) + F$,
 $u\omega$ s'annule sur $A_F(D + (u)) + L$.

En effet, $\alpha \in A_F(D + (u))$ signifie que :

$$v_P(\alpha) \geq -v_P(u), \forall P \in \mathcal{P}_F \Leftrightarrow v_P(u\alpha) \geq -v_P(D), \forall P \in \mathcal{P}_F \Leftrightarrow u\alpha \in A_F(D)$$

et donc $uw(\alpha) := \omega(u\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in A_F(D + (u))$.

On note donc que, si $u \in F^*$,

$$\omega \in \Omega_F(D) \Rightarrow u\omega \in \Omega_F(D + (u))$$

Notre définition donne donc bien à Ω_F une structure d'espace vectoriel sur F .

Proposition 2.4.11. :

Ω_F est un espace vectoriel de dimension 1 sur F

Preuve. :

Choisissons $0 \neq \omega_1 \in \Omega_F$ (nous savons que $\Omega_F \neq 0$).

Nous allons montrer que pour tout $\omega_2 \in \Omega_F$ il existe $z \in F$ avec $\omega_2 = z\omega_1$.

On peut supposer que $\omega_2 \neq 0$.

Choisissons $A_1, A_2 \in D_F$ tel que $\omega_1 \in \Omega_F(A_1)$ et $\omega_2 \in \Omega_F(A_2)$.

Pour un diviseur B (qui sera spécifié plus tard) on considère les applications K -linéaires, $i = 1, 2$

$$\varphi_i := \begin{cases} \mathcal{L}(A_i + B) & \longrightarrow \Omega_F(-B) \\ x & \longmapsto x\omega_i \end{cases}$$

φ_i est bien définie puisque, $u \in \mathcal{L}(A_i + B)^*$ signifie que $(u) \geq -A_i - B$ et on a donc :

$$u\omega_i \in \Omega_F(A_i + (u)) \subset \Omega_F(-B).$$

Affirmation :

Pour un choix approprié du diviseur B , on a $\varphi_1(\mathcal{L}(A_1 + B)) \cap \varphi_2(\mathcal{L}(A_2 + B)) \neq \{0\}$.

En utilisant cette affirmation la preuve de la proposition est facile.

En effet, on choisit $x_1 \in \mathcal{L}(A_1 + B)$ et $x_2 \in \mathcal{L}(A_2 + B)$ tels que $x_1\omega_1 = x_2\omega_2 \neq 0$.

Alors $\omega_2 = (x_1x_2^{-1})\omega_1$ comme voulu.

Preuve de l'affirmation :

Rappelons que : si U_1, U_2 sont des sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension V alors

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V.$$

Soit $B > 0$ un diviseur de degré suffisamment grand tel que

$$\dim(A_i + B) = \deg(A_i + B) + 1 - g \text{ pour } i = 1, 2.$$

c'est possible grâce au théorème de Riemann. L'ensemble $U_i := \varphi_i(\mathcal{L}(A_i + B)) \subseteq \Omega_F(-B)$.

Comme

$$\dim \Omega_F(-B) = i(-B) = \dim(-B) - \deg(-B) + g - 1 = \deg B + g - 1,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \dim U_1 + \dim U_2 - \dim \Omega_F(-B) \\ &= \deg(A_1 + B) + 1 - g + \deg(A_2 + B) + 1 - g - (\deg B + g - 1) \\ &= \deg B + (\deg A_1 + \deg A_2 + 3(1 - g)). \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèse est indépendant de B, donc

$$\dim U_1 + \dim U_2 - \dim \Omega_F(-B) > 0$$

Si $\deg B$ est suffisamment grand. Il s'en suit que $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ ce qui prouve notre affirmation. $\square$

Nous voulons associer à une différentielle de Weil $\omega \neq 0$, un certain diviseur.
Pour y parvenir, on considère (pour un ω fixé), l'ensemble des diviseurs :

$$M(\omega) := \{ A \in D_F \mid \omega \text{ s'annule en } A_F(A) + F \}$$

Lemme 2.4.12. :

Soit $0 \neq \omega \in \Omega_F$

Alors il y a un unique diviseur déterminé $W \in M(\omega)$ tel que $A \leq W$ pour $A \in M(\omega)$.

Preuve. :

D'après le théorème de Riemann il existe une constante c , dépendante seulement du corps de fonction F/K , avec la propriété $i(A) = 0$ pour tout $A \in D_F$ de degré $\geq c$.

Comme $\dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right) = i(A)$, nous avons $\deg A < c$ pour tout $A \in M(\omega)$.

Alors nous pouvons choisir un diviseur $W \in M(\omega)$ de degré maximal.

Supposons que W n'a pas la propriété de notre lemme.

Alors il existe un diviseur $A_0 \in M(\omega)$ avec $A_0 \leq W$, c'est à dire $v_Q(A_0) \geq v_Q(W)$ pour $Q \in \mathbb{P}_F$.

Nous affirmons que

$$W + Q \in M(\omega),$$

ce qui est en contradiction avec la maximalité de W .

En effet, considérons une répartition $\alpha = (\alpha_P) \in A_F(W + Q)$.

Nous pouvons écrire $\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec

$$\alpha'_P := \begin{cases} \alpha_P \text{ pour } P \neq Q, \\ 0 \text{ pour } P = Q \end{cases}$$

$$\alpha''_P := \begin{cases} 0 \text{ pour } P \neq Q, \\ \alpha_Q \text{ pour } P = Q \end{cases}$$

Alors $\alpha' \in A_F(W)$ et $\alpha'' \in A_F(A_0)$, donc $\omega(\alpha) = \omega(\alpha') + \omega(\alpha'') = 0$.

Alors ω est identiquement nul sur $A_F(W + Q) + F$, et l'affirmation est démontrée.

L'unicité de W est maintenant immédiate. $\square$

La définition qui va suivre prend alors un sens.

Définition 2.4.13. :

a. **Le diviseur (w) d'une différentielle de Weil $w \neq 0$ est l'unique diviseur de F/K satisfaisant :**

(a) w s'annule en $A_F(\omega) + F$.

(b) si w s'annule en $A_F(A) + F$ alors $A \leq (w)$.

b. Pour $0 \neq \omega \in \Omega_F$ et $P \in \mathbb{P}_F$, nous définissons $v_P(\omega) := v_P((\omega))$.

c. Une place P est dite **un zéro de w** (resp. **pôle de w**) si $v_P(\omega) > 0$ à (resp. $v_P(\omega) < 0$).

w est dite **régulière** en P si $v_P(\omega) > 0$ et w est dite **régulière** (ou holomorphe) si elle est régulière en tout point $P \in \mathbb{P}_F$.

d. Un diviseur W est appelé **un diviseur canonique de F/K** si $W = (w)$ pour $w \in \omega_F$

Remarque 2.4.14. :

Si $\omega \in \Omega_F \setminus \{0\}$ et $W = (\omega)$, on a donc les propriétés suivantes :

a. $\omega \in \Omega_F(W)$ et

b. pour tout diviseur D tel que $D \leq W$, $\omega \in \Omega_F(D)$.

Par suite on peut aussi écrire :

$$\Omega_F(A) = \{ w \in \Omega_F \mid w = 0 \text{ où } (w) \geq A \}$$

et

$$\Omega_F(O) = \{ w \in \Omega_F \mid w \text{ est régulière} \}$$

C'est l'espace des différentielles qui n'ont pas de pôles.

Comme conséquence du lemme 2.4.7 qui aboutissait au résultat $\dim \Omega_F(A) = i(A)$ et de la définition de l'index de spécialité, nous obtenons :

$$\dim \Omega_F(0) = g$$

Proposition 2.4.15. :

a. Pour $0 \neq x \in F$ et $0 \neq w \in \Omega_F$,
nous avons $(xw) = (x) + (w)$

b. Deux diviseurs canoniques de F/K sont équivalents.

Preuve. :

Si ω est identiquement nul sur $A_F(A) + F$ alors $x\omega$ est identiquement nul sur $A_F(A + (x)) + F$,
par conséquent

$$(\omega) + (x) \leq (x\omega).$$

De même $(x\omega) + (x^{-1}) \leq (x^{-1}x\omega) = (\omega)$. En combinant ces inégalités nous avons

$$(x\omega) + (x^{-1}) \leq (x\omega) \leq -(x^{-1}) + (\omega) = (\omega) + (x).$$

Cela montre (a), le (b) découle de (a) et de la proposition 2.4.11.

En effet, $(\omega) = (u) + (\omega_0)$ et donc les diviseurs canoniques sont équivalents entre eux.

De plus, si $D \sim (\omega_0)$, on a $D = (\omega_0) + (u) = (u\omega_0)$ donc D est un diviseur canonique.

□

Une conséquence simple de cette proposition est que les diviseurs canoniques de F/K forment
une classe entière $[W]$ dans le groupe C_F des classes de diviseurs ;

Cette classe de diviseur est appelée **la classe canonique de F/K** .

Nous arrivons enfin au coeur de notre sujet c'est à dire à la démonstration du théorème de Riemann Roch, elle va s'articuler de la manière suivante.

Dans un premier temps, on va établir une version préliminaire du théorème , en effet nous allons établir que :

$$\forall A \in D_F, \dim A = \deg A + 1 - g + \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right).$$

Pour cela au vu de la définition de l'index de spécialité, on devra établir que : Pour un diviseur A, l'index de spécialité est :

$$i(A) = \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right)$$

On établira le résultat en procédant par étapes bien précises.

Puis on montrera que $\dim \omega_F(A) = i(A)$ et que $i(A) = \dim (W-A)$. Ce qui montrera le théorème de Riemann roch en effet, on aura : pour tous $A \in A_F$,

$$\dim A = \deg A + 1 - g + \dim (W - A).$$

Prenons notre courage à deux mains et lançons nous...

2.4.3 Démonstration du théorème de Riemann Roch

Nous allons commencer par établir une version préliminaire du théorème de Riemman Roch qui montrera le résultat suivant :

$$\forall A \in D_F \dim A = \deg A + 1 - g + \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right)$$

Puisque pour $A \in D_F$, $i(A) := \dim A - \deg A + g - 1$, montrer ce résultat est équivalent à montrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.16. :

Pour un diviseur A, l'index de spécialité est :

$$i(A) = \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right)$$

Remarque 2.4.17. :

- Ici, $\dim$ veut dire la dimension en tant qu'espace vectoriel sur K .
- Notons que, bien que l'espace vectoriel A_F , $A_F(A)$ et f sont de dimensions infinis, le théorème dit que l'espace quotient $\frac{A_F}{A_F(A) + F}$ est de dimension finie sur K .

Preuve. :

On procède en plusieurs étapes.

– **Étape 1 :**

Soient $A_1, A_2 \in D_F$ et $A_1 \leq A_2$.

Alors $A_F(A_1) \subseteq A_F(A_2)$ et

$$\dim \left(\frac{A_F(A_2)}{A_F(A_1)} \right) = \deg A_2 - \deg A_1$$

Preuve de l'étape 1 :

$A_F(A_1) \subseteq A_F(A_2)$ est trivial. C'est suffisant pour montrer ce qui précède.

Dans le cas où $A_2 = A_1 + P$ avec $P \in \mathbb{P}_F$ (le cas général suit par induction).

On choisit $t \in F$ avec $v_P(t) = v_P(A_1) + 1$ et on considère l'application K-linéaire

$$\phi := \begin{cases} A_F(A_2) & \longrightarrow F_P \\ \alpha & \longmapsto (t\alpha_P)(P) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ϕ est surjective et que son noyau est $A_F(A_1)$. Par conséquent

$$\deg A_2 - \deg A_1 = \deg P = [F_P : K] = \dim \left(\frac{A_F(A_2)}{A_F(A_1)} \right)$$

– **Étape 2 :**

Soit $A_1, A_2 \in D_F$ et $A_1 \leq A_2$ comme dans ce qui précède. Alors

$$\dim \left(\frac{A_F(A_2) + F}{A_F(A_1) + F} \right) = (\deg A_2 - \dim A_2) - (\deg A_1 - \dim A_1)$$

Preuve de l'étape 2 :

Nous avons une suite exacte d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{L}(A_2)}{\mathcal{L}(A_1)} \longrightarrow \frac{A_F(A_2)}{A_F(A_1)} \longrightarrow \frac{A_F(A_2) + F}{A_F(A_1) + F} \longrightarrow 0$$

Où σ_1 et σ_2 sont clairement définies. En effet, la seule assertion non triviale est que le noyau de σ_2 est contenu dans l'image de σ_1 . Pour montrer cela, soit $\alpha \in A_F(A_2)$ avec $\sigma_2(\alpha + A_F(A_1)) = 0$. Alors $\alpha \in A_F(A_1) + F$, alors il y a $x \in F$ avec $\alpha - x \in A_F(A_1)$. Comme $A_F(A_1) \subseteq A_F(A_2)$ on conclut que $x \in A_F(A_2) \cap F = \mathcal{L}(A_2)$. On a donc $\alpha + A_F(A_1) = x + A_F(A_1) = \sigma_1(x + \mathcal{L}(A_1))$ est dans l'image de σ_1 .

De ce qui précède nous obtenons

$$\begin{aligned} & \dim \left(\frac{A_F(A_2) + F}{A_F(A_1) + F} \right) \\ &= \dim \left(\frac{A_F(A_2)}{A_F(A_1)} \right) - \dim \left(\frac{\mathcal{L}(A_2)}{\mathcal{L}(A_1)} \right) \\ &= (\deg A_2 - \deg A_1) - (\dim A_2 - \dim A_1) \end{aligned}$$

en utilisant l'étape 1.

– **Étape 3 :**

Si B est un diviseur avec $\dim B = \deg B + 1 - g$, alors $A_F = A_F(B) + F$

Preuve de l'étape 3 :

Nous commençons par observer que pour $B_1 \geq B$ nous avons :

$$\dim B_1 \leq \deg B_1 + \dim B - \deg B = \deg B_1 + 1 - g$$

D'autre part, $\dim B_1 \geq \deg B_1 + 1 - g$ par le théorème de Riemann. Donc

$$\dim B_1 = \deg B_1 + 1 - g \text{ pour tout } B_1 \geq B.$$

Maintenant nous montrons que $A_F = A_F(B) + F$. Soit $\alpha \in A_F$. Nous pouvons trouver un diviseur $B_1 \geq B$ tel que $\alpha \in A_F(B_1)$. Par le résultat de l'étape 2 et ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \dim \left(\frac{A_F(B_1) + F}{A_F(B) + F} \right) \\ = (\deg B_1 - \dim B_1) - (\deg B - \dim B) \\ = (g - 1) - (g - 1) = 0 \end{aligned}$$

Cela implique que $A_F(B) + F = A_F(B_1) + F$. Puisque $\alpha \in A_F(B_1)$ il s'en suit que $\alpha \in A_F(B) + F$, et on a le résultat voulu.

– **Étape 4 :**

Preuve du théorème : on montre que $i(A) = \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right)$

Preuve de l'étape 4 :

On considère un diviseur arbitraire A . Par le théorème de Riemann il existe un diviseur $A_1 \geq A$ tel que $\dim A_1 = \deg A_1 + 1 - g$, $A_F = A_F(A_1) + F$, et alors on obtient :

$$\begin{aligned} \dim \left(\frac{A_F}{A_F(A) + F} \right) &= \dim \left(\frac{A_F(A_1) + F}{A_F(A) + F} \right) \\ &= (\deg A_1 - \dim A_1) - (\deg A - \dim A) \\ &= (g - 1) + \dim A - \deg A = i(A) \end{aligned}$$

□

Par le corollaire qui suit nous obtenons une autre caractérisation du genre de F/K .

Corollaire 2.4.18. :

$$g = \dim \left(\frac{A_F}{A_F(0) + F} \right)$$

Preuve. :

$$i(0) = \dim(0) - \deg(0) + g - 1 = 1 - 0 + g - 1 = g$$

□

Nous tenons à préciser que c'est le théorème le plus important de la théorie des corps de fonctions.

Démontrons maintenant la version principale du théorème :

Théorème 2.4.19. (*Théorème de Riemman Roch*) :

Soit W un diviseur canonique de F/K

Alors, pour tous $A \in A_F$,

$$\dim A = \deg A + 1 - g + \dim (W - A)$$

Preuve. :

Etape 1 :

Lemme 2.4.7 démontré précédemment :

Pour $A \in D_F$, nous avons alors $\dim \Omega_F(A) = i(A)$.

Etape 2 :

Soit A un diviseur arbitraire et $W = (w)$ un diviseur canonique de F/K .

Alors l'application :

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{L}(W - A) & \longrightarrow \omega_F \\ x & \longrightarrow xw \end{cases}$$

est un isomorphisme de K -espace vectoriel.

En particulier : $i(A) = \dim (W - A)$.

Preuve de l'étape 2 :

Pour $x \in L(W - A)$ nous avons

$$(xw) = (x) + (w) \geq -(W - A) + W = A,$$

Alors $xw \in \Omega_F(A)$. Donc μ est une application de $L(W - A)$ dans $\Omega_F(A)$. μ est clairement linéaire et injective. Pour montrer que μ est surjective nous considérons une différentielle de Weil $\omega_1 \in \Omega_F(A)$. nous avons $\omega_1 = xw$ avec $x \in F$. comme

$$(x) + W = (x) + (w) = (xw) = (\omega_1) \geq A,$$

nous obtenons $(X) \geq -(W - A)$, alors $x \in L(W - A)$ et $\omega_1 = \mu(x)$. Nous avons montré que $\dim \Omega_F(A) = \dim (W - A)$.

Comme $\dim \Omega_F(A) = i(A)$ d'après le lemme 2.4.7 cela implique que $i(A) = \dim (W - A)$.

Etape 3 : (Démonstration du théorème)

Soit W un diviseur canonique de F/K alors, $\forall A \in A_F$, $\dim A = \deg A + 1 - g + \dim (W - A)$

Preuve de l'étape 2 :

$$\dim A = \deg A + 1 - g + i(A) = \deg A + 1 - g + \dim (W - A)$$

□

Chapitre 3

Conséquences du théorème de Riemann-Roch

3.1 Quelques conséquences immédiates

Corollaire 3.1.1. :

Pour un diviseur canonique W , nous avons $\deg W = 2g - 2$ et $\dim W = g$.

Par le théorème de Riemann, nous savons déjà qu'il y a une constante c tel que $i(A) = 0$ quand $\deg A \geq c$.

Nous pouvons maintenant donner une description plus précise de comment choisir cette constante.

Théorème 3.1.2. :

*Si A est un diviseur de F/K de degré $\geq 2g - 1$
alors $\dim A = \deg A + 1 - g$*

Observons que la majoration par $2g - 1$ qui a été obtenue dans ce résultat, est optimale, puisque le diviseur canonique W est tel que $\dim W = \deg W + 1 - g$ (par le corollaire ci-dessus).

3.2 Caractérisation du genre

Proposition 3.2.1. :

Soient $g_0 \in \mathbb{Z}$ et $W_0 \in \mathcal{D}_F$ satisfaisant à :

$$\dim A = \deg A + 1 - g_0 + \dim (W_0 - A)$$

pour tout $A \in \mathcal{D}_F$. Alors $g_0 = g$, et W_0 est un diviseur canonique.

Preuve. :

Pour $A = 0$ le théorème de Riemann-Roch donne

$$1 = \dim 0 = \deg 0 + 1 - g_0 + \dim (W_0 - 0).$$

ainsi $\dim W = g_0$.

Et pour $A = W_0$ nous obtenons

$$g = \dim W_0 = \deg W_0 + 1 - g_0 + \dim (W_0 - W_0).$$

alors $\deg W_0 = 2g_0 - 2$.

Par conséquent W_0 est un diviseur canonique.

Soit F/K un corps de fonctions, W un diviseur canonique de F/K .

Choisissons un diviseur A avec $\deg A > \max \{2g - 2, 2g_0 - 2\}$.

Alors $\dim A = \deg A + 1 - g$, puisque $\dim A = \deg A + 1 - g + \dim (W - A)$ et comme $\deg A \leq 2g - 1$ et $\deg W = 2g - 2$, $\deg (W - A) < 0$.

Il s'en suit que $\dim (W - A) = 0$. Et $\dim A = \deg A + 1 - g_0$ d'après la relation satisfaite par g_0 .

Donc $g_0 = g$

Enfin, posons $A = W$. Ce qui donne

$$g = (2g - 2) + 1 - g + \dim(W_0 - W),$$

d'où $\dim (W_0 - W) = 1$.

Comme $\deg (W_0 - W) = 0$ ce qui implique que $W_0 - W$ est principal, alors $W_0 \sim W$. □

3.3 Caractérisation du corps rationnel

Théorème 3.3.1. :

Pour un corps de fonctions F/K les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a. F/K est rationnel i.e $F = K(x)$ pour un x transcendant sur K .*
- b. F/K est de genre zéro, et il existe un diviseur $A \in \mathcal{D}_F$ de degré 1 (dans le cas où K est algébriquement clos ou si K est un corps fini cette dernière condition est superflue).*

Preuve. :

Nous avons déjà montré $(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$ si $g = 0$ et $\deg A = 1$ comme $\deg A \leq 2g - 1$ nous avons $\dim A = \deg A + 1 - g = 2$. Donc il existe un diviseur effectif $\tilde{A}$ ($\tilde{A} \geq 0$) tel que $A \sim \tilde{A}$, $\deg \tilde{A} = 1$ et $\dim \tilde{A} = 2$ d'où il existe un élément $x \in \mathcal{L}(\tilde{A}) \setminus K$, alors $(x) \neq 0$ et $(x) + \tilde{A} \geq 0$. Comme $\tilde{A}$ est effectif, $\tilde{A} \geq 0$ et $\deg \tilde{A} = 1$, nous avons nécessairement $\tilde{A} = (x)_\infty$, le diviseur polaire de x . Il s'en suit

$$[F : K(x)] = \deg(x)_\infty = \deg \tilde{A} = 1.$$

alors $F = K(x)$. □

Si K n'est pas parfait, il existe des corps de genre 0 qui ne sont pas rationnels. Mais si K est parfait, F/K est le corps rationnel si et seulement si le genre est nul.

3.4 Théorème de Clifford

Citons le théorème de Clifford qui donne une majoration de $\dim(D)$ dans le cas où $0 \leq \deg D \leq 2g - 2$.

Théorème 3.4.1. :

Soient F/K un corps de fonctions, $D \in \mathcal{D}_F$ tel que $0 \leq \deg D \leq 2g - 2$ alors

$$\dim(D) \leq 1 + \frac{1}{2} \deg D.$$

Preuve. :

- a. Si $\dim(D) = 0$ c'est clair.
- b. Si $i(D) = \dim(k - D) = 0$ on a :
 $\dim(D) = \deg D - g + 1 = 1 + \frac{1}{2} \deg D + \frac{1}{2} \deg D - g \leq 1 + \frac{1}{2} \deg D - 1 < 1 + \frac{1}{2} \deg D$.
 Donc la propriété est aussi vérifiée.
- c. Supposons que $\dim(D) > 0$ et $\dim(k - D) > 0$.
 Nous avons d'une part :

$$\dim(D) - \dim(k - D) = \deg D - g + 1.$$

D'autre part, montrons que :

$$\dim(D) + \dim(k - D) \leq 1 + \dim(k) = 1 + g,$$

alors en ajoutant ces deux expressions nous aurons le résultat voulu.

Plus généralement nous pouvons montrer que

$$\dim(A) > 0 \text{ et } \dim(B) > 0 \Rightarrow \dim(A) + \dim(B) \leq 1 + \dim(A + B).$$

En effet, soit $A \geq 0$ tel que $\dim(A) > 0$.

L'ensemble

$$X := \{D \in \mathcal{D}_F | D \leq A \text{ et } \dim(D) = \dim(A)\}$$

est non-vide car elle contient A et ses éléments ont un degré ≥ 0 .

Soit A_0 un élément de X de degré minimal.

On a donc, pour toute place P , $\dim(A_0 - P) < \dim(A_0)$.

Montrons que A_0 et $B := P_1, \dots, P_r$ vérifient notre relation.

On a $\dim(A_0 - P_i) < \dim(A_0)$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

On suppose que K est infini(si $K = \mathbb{F}_q$ on peut montrer que c'est encore vrai :

on fait la preuve pour $K = \mathbb{F}_q$ puis on utilise que $\dim(D)$ est invariant par extension du corps des constantes).

Alors il existe

$$u \in \mathcal{L}(A_0) / \cup_{i=1}^r \mathcal{L}(A_0 - P_i).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(B) & \longrightarrow & \mathcal{L}(B + A_0) / \mathcal{L}(A_0) \\ x & \longmapsto & xz \text{ mod } \mathcal{L}(A_0). \end{array}$$

est égal à K .

Donc $\dim(B) - 1 \leq \dim(B + A_0) - \dim(A_0)$, d'où le résultat pour A_0 et B .

Enfin, puisque $A_0 \leq A$ et $\dim(A_0) = \dim(A)$,

$$\dim(A) + \dim(B) = \dim(A_0) + \dim(B) \leq 1 + \dim(B + A_0) \leq 1 + \dim(B + A).$$

□

3.5 Lacunes en une place

Lemme 3.5.1. *Soit P une place. Pour tout $n \geq 2g$ et pour toute place P , il existe une fonction $z \in F$ telle que $(z)_\infty = nP$ (en particulier P est l'unique pôle de z)*

Preuve. :

$$\dim (nP) = n \deg P - g + 1$$

et

$$\dim ((n-1)P) = (n-1) \deg P - g + 1 < n \deg P - g + 1 = \dim (nP)$$

Comme $\mathcal{L}((n-1)P) \subset \mathcal{L}(nP)$, il existe $z \in \mathcal{L}(nP)/\mathcal{L}((n-1)P)$ et on a $(z)_\infty = nP$. $\square$

Définition 3.5.2. :

Soit P une place. Un entier $n \geq 0$ est une lacune en P (resp. non-lacune en P) s'il n'existe pas (resp. s'il existe) $z \in F$ tel que $(z)_\infty = nP$.

Le lemme précédent montrer qu'aucun entier $n \geq 2g$ n'est une lacune. D'autre part 0 n'est pas une lacune car si $\lambda \in K^*$, $(\lambda) = 0$.

Lemme 3.5.3. :

L'ensemble des non-lacunes en P est un semi-groupe additif.

Preuve. :

En toute place P , 0 est une non-lacune et si n_1 et n_2 sont des non-lacunes on a :

$(x_1) = n_1P$ et $(x_2) = n_2P$, d'où $(x_1x_2) = (n_1 + n_2)P$ donc $n_1 + n_2$ est une non-lacune $\square$

Proposition 3.5.4. :

On suppose que F/K a un genre $g > 0$ et possède une place P de degré 1.

Alors il y'a exactement g lacunes distinctes en P $i_1 = 1 < \dots < i_g = 2g - 1$.

Preuve. :

Considérons la suite formée des $2g$ K -espaces vectoriels suivants

$$K = \mathcal{L}(0) \subset \mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(2P) \subset \dots \subset \mathcal{L}((2g-1)P).$$

On a $\dim(0) = 1$, $\dim((2g-1)P) = 2g - 1 - g + 1 = g$ et la différence entre les dimensions de deux espaces successifs est au plus 1 puisque

$$\dim (\mathcal{L}(nP)/\mathcal{L}((n-1)P)) \leq \deg nP - \deg (n-1)P = \deg P = 1.$$

Par suite il y a exactement g espaces vectoriels distincts dans la suite précédente et donc exactement g lacunes en P comprises entre 0 et $2g - 1$. L'entier 1 est une lacune sinon tout $n \geq 0$ serait une non-lacune grâce au fait que l'ensemble des non-lacunes en P est un semi-groupe et c'est impossible par ce que $g > 0$. $\square$

Soit P une place de degré 1 de F/K . En utilisant le théorème de Riemann-Roch, on obtient $n \in \mathbb{N}^*$ est une lacune en $P \iff \dim (nP) = \dim ((n-1)P) \iff i((n-1)P) = i(nP) + 1$.

Par suite

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ est une lacune en } P \iff \mathcal{L}(nP) = \mathcal{L}((n-1)P) \iff \Omega_F(nP) \subsetneq \Omega_F((n-1)P),$$

et

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ est une lacune en } P \iff \mathcal{L}(nP) \supsetneq \mathcal{L}((n-1)P) \iff \Omega_F(nP) = \Omega_F((n-1)P).$$

Conclusion

La théorie de la valuation est comme nous l'avons vu une théorie très puissante et très belle qui nous a permis de réaliser de magnifiques démonstrations.

Nous savons maintenant que tout anneau de valuation discrète de F/K est isomorphe à l'anneau local en un point sur une courbe affine non singulière.

Sachant cela grâce à la théorie de la valuation, nous avons pu trouver la $\dim \mathcal{L}(A)$ (qui comme nous l'avons vu à travers la conséquence importante de la définition 2.1.1 peut être assimilé à la notion de zéros et de pôles) c'est ainsi que nous avons répondu à la deuxième question.

En effet, $\dim A$ nous a permis de donner la dimension de l'espace des courbes affines non singulières ayant un nombre de pôles et de zéros fixés à l'avance.

Ceci étant dit ce théorème a une portée beaucoup plus large. Nous l'avons entrevu à travers quelques applications comme la caractérisation du genre et du corps des rationnels (qui nous a suivie le long de notre ter), le théorème de Clifford et la notion de lacunes en une place.

Nous n'avons par manque de temps pas pu aborder d'autres application plus difficiles à démontrer.

Nous aurions pu démontrer le théorème de Riemann Roch par la théorie des faisceaux mais c'est une théorie bien compliquée et nos connaissances en géométrie algébrique ne sont pas assez poussées. Si cela intéresse le lecteur, il trouvera la preuve par la théorie des faisceaux dans le GEOMETRY ALGEBRAIC du Hartshorne.

Nous avons découvert dans ce ter une théorie que nous connaissions à peine et nous avons pu remarquer son efficacité et cela découvrir un peu mieux la géométrie algébrique.

Il est évident qu'avec un peu plus de temps nous aurions pu étendre notre sujet et pouvoir en voir d'avantage, peut être plus tard...

Nous concluerons avec cette citation :

Notre pédagogie ne donne à ceux qui apprennent les mathématiques que bien peu de chances d'entrevoir le sens profond, la raison d'être, de ce sur quoi portent leurs efforts.

...Jaillissement de l'esprit..

Seymour Papert

Index

- Addition sur les diviseurs, 27
- Anneau de Dedekind, 21
- Anneau de valuation, 6
- Anneau de valuation discrète, 8
- Anneau de valuation à la place P , 10
- Anneau dominant, 21
- Application résiduelle à la place P , 11
- Corps algébriquement clos, 5
- Corps de fonction algébrique à une variable, 5
- Corps des constantes, 5
- Corps résiduel à la place P , 11
- Courbe abstraite non singulière, 23
- Degré d'un diviseur, 28
- Différentielle de Weil, 42
- Différentielle régulière, 45
- Dimension d'un diviseur, 34
- Diviseur canonique, 45
- Diviseur d'une différentielle de Weil, 45
- Diviseur des pôle de x , 29
- Diviseur des zéros de x , 29
- Diviseur positif, 28
- Diviseur premier, 27
- Diviseur principal de x , 29
- Elément neutre, 28
- Elément transcendant, 5
- Equivalence de deux diviseurs, 29
- Groupe des classe des diviseurs, 29
- Groupe des diviseurs, 27
- Groupe des diviseurs principaux de F/K , 29
- Groupe des unités, 6
- Index de spécialité, 40
- Inégalité triangulaire stricte, lemme, 9
- module des différentielle de Weil, 42
- Morphisme entre courbes abstraites non singulières ou variétés, 23
- Paramètre local en P , 10
- place à l'infini, 14
- Places, 10
- Pôle d'ordre m , 12
- pôles de w , 45
- Relation d'ordre sur les diviseurs, 28
- Répartition principale, 40
- Répartition, 40
- Support d'un diviseur, 28
- théorème de Clifford, 54
- Théorème de faible approximation, 18
- Théorème de Riemann Roch, 50
- Uniformisante en P , 10
- Valuation discrète, 9
- Zéro de w , 45
- Zéro de z , 12
- Zéro de z d'ordre m , 12

Bibliographie

- [1] Dominique Le Brigand. *Méthode algébrique, méthode pour les corps globaux*. Cours dea, Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- [2] Department of mathematic university of californy Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, Editorial Bord, 1977.
- [3] Henning Stichtenoth. *Algebraic function and codes*. Springer, 1993.

Biographies

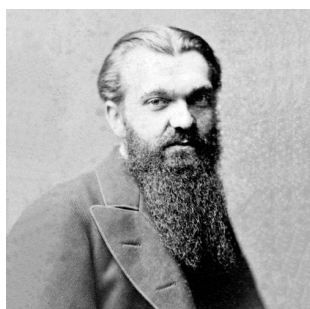
Auteurs des démonstrations



André Weil, né le 6 mai 1906 à Paris et mort à Princeton (New Jersey, États-Unis) le 6 août 1998, est une des grandes figures parmi les mathématiciens du XXe siècle. Connue pour son travail fondamental en théorie des nombres et en géométrie algébrique, il fut un des membres fondateurs du groupe Bourbaki.



RIEMANN Georg Friedrich Bernhard (1826-1866), né à Breselenz (Allemagne), Riemann, étudiant à Gottingen et à Berlin, passa son doctorat à Gottingen en 1851, s'y fit habilitier en 1853, y enseigna et succéda, en 1859, à Dirichlet dans la chaire de mathématiques. Atteint de tuberculose, il est mort au cours d'un voyage en Italie. Visionnaire de génie, ses idées, même non accompagnées de preuves, n'ont cessé d'inspirer les mathématiciens pendant un siècle.



William Clifford naît à Exeter et suit sa scolarité dans cette ville, dans une école privée. Il poursuit ses études au Collège Royal de Londres et à Cambridge. En 1871, il est professeur de mathématiques à l'University College de Londres et, en 1874, devient un membre de la Royal Society. Il est aussi membre de la société métaphysique. En 1875, il épouse Lucy Lane dont il aura deux filles. En 1876, sa santé se détériore et il meurt en 1879 à Madère de problèmes respiratoires.



Gustav Roch (Décembre 1839 - Novembre 1866) était un mathématicien allemand qui contribua à la théorie des surfaces de Riemann.

Auteurs des livres



Robin HARTSHORNE, University of California Department of Mathematics, 94720-38 Berkeley, CA, U.S.A. robin@math.berkeley.edu



Henning STICHTENOTH, FB 6 Mathematik und Informatik, Univ. GH Essen D-45117 Essen ALLEMAGNE stichtenoth@uni-essen.de



Dominique LE BRIGAND, Institut de Math. de Jussieu, Univ. de Paris 6, Case 82, 4 pl. Jussieu, 75252 PARIS cedex 05 FRANCE Dominique.Lebrigand@math.jussieu.fr