Formes de Maass et équations fonctionnelles de Lewis-Zagier

VINCENT PIT

22 novembre 2007

Table des matières

Références : [LZ01].

1 Cadre

Modèle	Disque	Demi-plan
Espace	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert < 1\}$	$\{w \in \mathbb{C} \mid \Im(w) > 0\}$
Métrique	$\dfrac{2\lvert dz\rvert}{1-\lvert z\rvert^2}$	$\dfrac{\lvert dz\rvert}{y}$
Isométries directes	$z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z+\mu}{1+\bar{\mu}z}$	$w \mapsto \dfrac{aw+b}{cw+d}$
Bord à l'infini	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Géodésiques	droites passant par 0 arcs tangents à $\mathbb{S}^1$	droites verticales arcs tangents à $\mathbb{R}$
Laplacien	$\Delta_{\mathbb{D}} = 4\left(1-\lvert z\rvert^2\right)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$	$\Delta_{\mathbb{H}} = y^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$
Noyau de Poisson	$P(z,\xi) = \dfrac{1-\lvert z\rvert^2}{\lvert z-\xi\rvert^2}$	$P(w,\varphi) = \dfrac{\Im(w)}{\lvert w-\varphi\rvert^2}(1+\varphi^2)$ $P(w,\infty) = \Im(w)$
Utilité	Géométrie	Analyse

Le groupe des transformations de Möbius s'identife à $PSL(2,\mathbb{R})$. Si $\Gamma < PSL(2,\mathbb{R})$ est fuchsien (discret), il agit proprement discontinûment sur $\mathbb{D}$ et on peut considérer le quotient $\mathbb{D}/\Gamma$. Γ est dit *cocompact* (resp. *cofini*) si ce quotient est compact (resp. de volume fini). Ce quotient peut être représenté par un *domaine fondamental de Dirichlet* qui est un polygone géodésique à $2n$ côtés associés par paires par un système de générateurs de Γ.

Pour $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$, on obtient la surface modulaire. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $PSL(2,\mathbb{Z})$. On notera aussi $U = TS$.

D'autres notations courantes : $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \sigma = \Re(s), \lambda_s = -s(1-s)$.

2 Protagonistes

2.1 Fonctions holomorphes périodiques

Définition 2.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ globalement invariant par $T : z \mapsto z+1$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite *périodique* lorsqu'elle est T-invariante. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'espace des fonctions périodiques sur Ω.

Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de complexes à croissance polynômiale, on peut définir une fonction holomorphe périodique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} F(A) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{s-\frac{1}{2}} A_n e^{2\pi i n z} \text{ si } \Im(z) > 0 \\ \displaystyle -\sum_{n\geq 1} \lvert n\rvert^{s-\frac{1}{2}} A_n e^{2\pi i n z} \text{ si } \Im(z) < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

2.2 Formes automorphes, modulaires, de cusp, de Maass

Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$.

Définition 2.2.1 (Slash action)**.** Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $(f|_k\gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)$.

Définition 2.2.2 (Fonction automorphe, modulaire)**.** f est une *fonction automorphe (resp. modulaire) de poids* k lorsque : $\forall\gamma\in\Gamma, f|_k\gamma = f$ (resp. $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$).

Définition 2.2.3 (Forme automorphe, modulaire)**.** f est une *forme automorphe (resp. modulaire) de poids* k lorsque c'est une fonction automorphe (resp. modulaire) de poids k méromorphe sur $\mathbb{H}$ et en chaque cusp.

Définition 2.2.4 (Forme de cusp)**.** f est une *forme de cusp de poids* k lorsque c'est une forme automorphe de poids k qui s'annule en tout cusp.

Définition 2.2.5 (Forme de Maass)**.** f est une *forme de Maass de poids* k *et de paramètre* s lorsque c'est une fonction modulaire de poids k, λ_s-vecteur propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$, et telle que $f(z) = O_{+\infty}(y^{-A})$ pour un $A > 0$.

Les formes de Maass n'existent que pour $\Re(s) = \frac{1}{2}$. On note $\mathcal{M}_s$ l'espace des formes de Maass modulaires de poids 0 et de paramètre s. Il est conjecturé que $\dim\mathcal{M}_s \leq 1$.

Si $(A_n)_{n\neq 0}$ est une suite de complexes à croissance polynômiale, on peut lui associer une forme de Maass modulaire de poids 0 et de paramètre s par :

$$\begin{array}{rrcl} U(A)\ : & \mathbb{H} & \to & \mathbb{C} \\ & z = x+iy & \mapsto & \sqrt{y}\displaystyle\sum_{n\neq 0} A_n K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi\,|n|\,y)e^{2\pi inx} \end{array}$$

2.3 Séries L

Définition 2.3.1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ suite de complexes à croissance polynômiale. On appelle *série L de coefficients* (A_n) la série

$$L(A) : \rho \mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{A_n}{n^\rho}$$

qui converge dans un certain demi-plan $\Re(\rho) > A$.

Ces séries ont souvent une équation fonctionnelle qui relie $L(z)$ et $L(1-z)$.

2.4 Équations fonctionnelles

Définition 2.4.1.

$$FE_s(\Omega) = \left\{\psi : \Omega \to \mathbb{C} \ \middle|\ \psi(z) = \psi(z+1) + (z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{z}{z+1}\right)\right\}$$

Lemme 2.4.2. $\tau : \psi \in FE_s(\Omega) \mapsto \left(\psi^\tau : z \mapsto z^{-2s}\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ *est une involution de* FE_s.

Par conséquent, ses valeurs propres sont -1 et 1.

On peut aussi se donner des versions paires et impaires de cette équation :

Définition 2.4.3.

$$FE_s^{\pm}(\Omega) = \left\{\psi : \Omega \to \mathbb{C} \ \middle|\ \psi(z) = \psi(z+1) \pm z^{-2s}\psi\left(\frac{z+1}{z}\right)\right\}$$

Proposition 2.4.4. $FE_s = FE_s^+ \oplus FE_s^-$.

Preuve : Si $\psi \in FE_s^{\pm}$, ψ est τ-(anti)invariant (car le second membre de l'équation fonctionnelle (im)paire l'est). On remplace alors ψ par $\pm\psi^\tau$ et $z^{-2s}\psi^\tau\left(\frac{z+1}{z}\right)$ par $(z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{z}{z+1}\right)$. ■

Exemples :

– $z \mapsto 1 - z^{-2s} \in FE_s^-(\mathbb{C}')_\omega$;

– $z \mapsto \displaystyle\sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{(mz+n)^{2s}} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mz)^{2s}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \in FE_s^+(\mathbb{C}')$ pour $\Re(s) > 1$.

Ces équations ont beaucoup de solutions. On doit se donner des conditions de croissance au bord pour avoir un espace des solutions de dimension finie.

On note alors :

$$FE_s^*(\mathbb{R}_+) = \left\{\psi \in FE_s(\mathbb{R}_+) \mid \psi(x) = o_0\left(x^{-\min\{1,2\sigma\}}\right), \psi(x) = o_{+\infty}(x^{\min\{0,1-2\sigma\}})\right\}$$

$$FE_s^*(\mathbb{C}') = \left\{\psi \in FE_s(\mathbb{C}') \mid \psi(z) \ll \begin{cases} |\Im(z)|^{-A}\left(1+|z|^{2(A-\sigma)}\right) & \text{si } \Re(z) \leq 0 \\ 1 & \text{si } \Re(z) \geq 0, |z| \leq 1 \\ |z|^{-2\sigma} & \text{si } \Re(z) \geq 0, |z| \leq 1 \end{cases}\right\}$$

Dès qu'on affaiblit ces condtions de croissance, beaucoup de nouvelles solutions arrivent. Par exemple, pour $\sigma = \frac{1}{2}$,

$$\dim\left\{\psi \in FE_s(\mathbb{R}_+) \mid \psi(x) = O_0\left(\frac{1}{x}\right), \psi(x) = O_{+\infty}(1)\right\} = +\infty.$$

3 Correspondance de Lewis-Zagier

On rappelle que la *transformée de Mellin* de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{array}{rcccc} M[f] & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \displaystyle\int_0^\infty f(y) y^{z-1} dy \end{array}.$$

Son inverse s'obtient pour C suffisamment grand par

$$\begin{array}{rcccc} M^{-1}[g] & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & y & \mapsto & \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Re(\rho)=C} g(\rho) y^{-\rho} d\rho \end{array}.$$

On pose :

$$\gamma_s(\rho) = \frac{1}{4\pi^\rho} \Gamma\left(\frac{\rho - s + \frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho + s - \frac{1}{2}}{2}\right) = M\left(K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi .)\right),$$

$$\Lambda^\pm : f \mapsto \left(z \mapsto \frac{1}{c_\pm(s)}\left[f(z) \pm z^{-2s} f\left(\frac{-1}{z}\right)\right]\right).$$

3.1 Énoncé

Théorème 3.1.1. *Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$. On peut mettre en bijection les objets suivants :*
(i) une forme de Maass u de paramètre s (de poids 0) ;
(ii) une paire de séries L (L_0, L_1) convergeant dans un certain demi-plan, telles que pour $\varepsilon \in \{0; 1\}$, $L^*_\varepsilon(\rho) = \gamma_s(\rho + \varepsilon) L_\varepsilon(\rho)$ soit entières d'ordre fini et satisfassent $L^*_\varepsilon(1-\rho) = (-1)^\varepsilon L^*_\varepsilon(\rho)$.
(iii) $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, majorée par $|\Im(z)|^{-A}$ pour un $A > 0$, telle que $\Lambda^-(f)$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}'$ et est majorée par $\min\{1, |z|^{-2\sigma}\}$.
(iv) $\psi \in FE^*_s(\mathbb{C}')$.

3.2 Relation formelle entre (iii) et (iv)

Lemme 3.2.1. $\Lambda^- \circ \Lambda^+ = id$ *SSI* $c_+(s) c_-(s) = 1 - e^{2i\pi s}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \Lambda^-\Lambda^+\varphi(z) &= \frac{1}{c_-(s)c_+(s)}\left[\left(\psi(z) + z^{-2s}\psi\left(\frac{-1}{z}\right)\right) - z^{-2s}\left(\psi\left(\frac{-1}{z}\right) + \left(\frac{-1}{z}\right)^{-2s}\psi(z)\right)\right] \\ &= \frac{1 - e^{2i\pi s}}{c_-(s)c_+(s)}\psi(z). \end{aligned}$$

■

On peut prendre $c_-(s) = \frac{i\pi^{-s}}{\Gamma(1-s)}$ et $c_+(s) = \begin{cases} \frac{2\pi^{s+1}}{\Gamma(s)} e^{-i\pi s} \text{ si } \Im(s) > 0 \\ -\frac{2\pi^{s+1}}{\Gamma(s)} e^{i\pi s} \text{ si } \Im(s) < 0 \end{cases}$

Lemme 3.2.2.
(i) $\Lambda^+(FE_s(\mathbb{H})) \subset \mathcal{P}(\mathbb{H})$;
(ii) $\Lambda^-(\mathcal{P}(\mathbb{H})) \subset FE_s(\mathbb{H})$.

Preuve : Si $\psi \in FE_s(\mathbb{H})$, $\psi(z+1) - \psi(z) + (z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{z}{z+1}\right)$ est identiquement nulle donc

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\psi(z+1) - \psi(z) + (z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{z}{z+1}\right)\right] \\
&- (z+1)^{-2s}\left[\psi\left(\frac{-1}{z+1}+1\right) - \psi\left(\frac{-1}{z+1}\right) + \left(\frac{-1}{z+1}+1\right)^{-2s}\psi\left(\frac{\frac{-1}{z+1}}{\frac{-1}{z+1}+1}\right)\right] \\
&= \left[\psi(z+1) - \psi(z) + (z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{z}{z+1}\right)\right] \\
&- (z+1)^{-2s}\left[\psi\left(\frac{z}{z+1}\right) - \psi\left(\frac{-1}{z+1}\right) + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-2s}\psi\left(\frac{-1}{z}\right)\right] \\
&= \left[\psi(z+1) + (z+1)^{-2s}\psi\left(\frac{-1}{z+1}\right)\right] - \left[\psi(z) + z^{-2s}\psi\left(\frac{-1}{z}\right)\right]
\end{aligned}$$

et ainsi $\Lambda^+(\psi)$ est périodique.

Si maintenant $f \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned}
&\Lambda_- f(z) - \Lambda_- f(z+1) - (z+1)^{-2s}\Lambda_- f\left(\frac{z}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{c_-(s)}\Big[\left(f(z) - z^{-2s}f\left(\frac{-1}{z}\right)\right) - \left(f(z+1) - (z+1)^{-2s}f\left(\frac{-1}{z+1}\right)\right) \\
&- (z+1)^{-2s}\left(f\left(1-\frac{1}{z+1}\right) - \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-2s}f\left(-1-\frac{1}{z}\right)\right)\Big] \\
&= \frac{1}{c_-(s)}\Big[(f(z) - f(z+1)) - z^{-2s}\left(f\left(\frac{-1}{z}\right) - f\left(-1-\frac{1}{z}\right)\right) \\
&+ (z+1)^{-2s}\left(f\left(\frac{-1}{z+1}\right) - f\left(1-\frac{1}{z+1}\right)\right)\Big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

3.3 Invariance suivant T

Lemme 3.3.1. *On a bijection entre :*
(i) les solutions périodiques de $\Delta_{\mathbb{H}}u = -s(1-s)u$ telles que $u(x+iy) = O(y^A)$ avec $A < \min(\sigma, 1-\sigma)$;
(ii) les paires de séries L convergeant pour $\Re(z) > C$;
(iii) les fonctions holomorphes périodiques sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfaisant $f(z) = O\left(|\Im(z)|^{-A}\right)$.

3.3.1 Approche par Fourier

$$u(z) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0} A_n K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi\,|n|\,y)e^{2\pi inx}$$
$$A_{n,\varepsilon} = A_n + (-1)^{\varepsilon}A_{-n}$$
$$L_\varepsilon = L(A_{.,\varepsilon})$$
$$f = F(A).$$

3.3.2 Approche par Mellin

On pose $u_0(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} u(iy)$ et $u_1(y) = \frac{\sqrt{y}}{2\pi i} \frac{\partial u}{\partial x}(iy)$.

Lemme 3.3.2. *Avec les notations précédentes :*
(i) $L_\varepsilon^*(\rho) = M[u_\varepsilon](\rho)$ *;*
(ii) $(2\pi)^{-\rho}\Gamma(\rho)L_\varepsilon(\rho - s + \frac{1}{2}) = M[f(i.) - (-1)^\varepsilon f(-i.)](\rho)$.

Preuve : $u_\varepsilon(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (ny)^\varepsilon A_{n,\varepsilon} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi n y)$.
$M[e^{-2\pi \cdot}](\rho) = (2\pi)^{-\rho}\Gamma(\rho)$. ■

3.4 $(i) \Leftrightarrow (ii)$

Si u est un λ_s-vecteur propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$, $v : z \mapsto u(z) - u\left(\frac{-1}{z}\right)$ aussi. Cette fonction est donc identiquement nulle *SSI* elle s'annule au second ordre sur l'axe imaginaire. Ceci équivaut à demander que $u_\varepsilon\left(\frac{1}{y}\right) = (-1)^\varepsilon y u_\varepsilon(y)$. On utilise alors que $L_\varepsilon^*(\rho) = M[u_\varepsilon](\rho)$ pour en déduire $v = 0$ *SSI* $L_\varepsilon^*(1-\rho) = (-1)^\varepsilon L_\varepsilon^*(\rho)$.

Réciproquement, on utilise la transformée de Mellin inverse mais on a besoin d'estimer la croissance de L_ε^* sur les bandes verticales. On utilise pour cela le théorème de Phragmén-Lindelöf.

3.5 $(ii) \Rightarrow (iii)$

Comme les (A_n) sont à croissance polynômiale, f vérifie la condition de décroissance à l'infini. Il reste à montrer que $f(z) - z^{-2s} f\left(\frac{-1}{z}\right) = \Lambda_- f(z)$ se prolonge analytiquement de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ à $\mathbb{C}'$.

Lemme 3.5.1.

$$\Lambda_- f(z) = \frac{\sin \pi s}{2\pi^{s+2}} \int_{\Re(\rho)=C} \Bigg[\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2s-\rho+1}{2}\right) L_0^*(\rho - s + \frac{1}{2} \\ - i\pi\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2s-\rho}{2}\right) L_1^*(\rho - s + \frac{1}{2}\Bigg] z^{-\rho} d\rho$$

Preuve : On calcule la transformée de Mellin de $f(\pm i.)$. ■

3.6 $(iii) \Rightarrow (iv)$

ψ est donnée par la relation formelle, et l'estimée en découle.

3.7 $(iv) \Rightarrow (ii)$

D'après l'invariance selon T, les L_ε^* existent. Reste à monter qu'elles vérifie l'équation fonctionnelle, qu'elles sont entières et d'ordre fini.

Pour l'équation, on regarde la transformée de Mellin de ψ. Les estimées sur sa croissance impliquement que $M[\psi]$ converge sur $0 < \Re(\rho) < 2\sigma$ et qu'on peut tourner l'axe d'intégration :

$$i^\rho \int_0^\infty \psi(iy) y^{\rho-1} dy = i^{-\rho} \int_0^\infty \psi(-iy) y^{\rho-1} dy$$

On remplace alors par f et on calcule.

4 Bootstrap

Théorème 4.0.1. *Soit s de partie réelle strictement positive. Toute solution $\psi \in FE_s^*(\mathbb{R}^+)$ se prolonge en un élément de $FE_s^*(\mathbb{C}')$.*

5 Les fonctions périodes comme...

5.1 ...intégrales d'une 1-forme

5.1.1 Forme de Green

Définition 5.1.1. Soient u, v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{D}$. On appelle *crochet de Green* la 1-forme différentielle

$$\{u, v\}(z) = \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy.$$

Proposition 5.1.2. $\forall \gamma \in PSL(2, \mathbb{R}), \{u \circ \gamma, v \circ \gamma\}(z) = \{u, v\}(\gamma(z))$ *;*

Définition 5.1.3. (vecteur normal sortant) $n = \dfrac{\partial z}{\partial r}$

Proposition 5.1.4. *Si* $\dfrac{\partial u}{\partial n}(z) = Du(z)n$*, alors* $\{u, v\} = \left(v\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) \dfrac{2\,|dz|}{1 - |z|^2}$.

D'après la formule de Green,

$$\int\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_{\partial\Omega} \{u, v\}. \tag{1}$$

Proposition 5.1.5. *Si u et v sont vecteurs propres de Δ pour la même valeur propre, alors $\{u, v\}$ est fermée.*

5.1.2 Puzzle

On pose $R_\zeta(z) = \dfrac{\Im(z)}{|z - \zeta|^2}$

Proposition 5.1.6.
(i) $R_\zeta^s(z)$ *est un* λ_s*-vecteur propre de* $\Delta_{\mathbb{H}}$ *;*
(ii) $\forall \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}, R_{\gamma\zeta}^s(\gamma z) = (c\zeta + d)^{2s} R_\zeta^s(z)$.

Définition 5.1.7. $\Psi[u](\zeta) = \displaystyle\int_0^{i\infty} \{u, R_\zeta^s\}(z)$.

Les isométries $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ agissent sur $\Psi[u]$ par $\gamma \star \Psi[u] = \displaystyle\int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(\infty)} \{u, R_\zeta^s\}(z)$.

Théorème 5.1.8. $\forall \gamma \in PSL(2, \mathbb{R}), u \circ \gamma = u \Rightarrow \gamma \star \Psi[u](\zeta) = (c\zeta + d)^{-2s}\Psi[u](\gamma\zeta)$.

5.2 ...test d'une distribution à l'infini

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{|z-t|^2}\right)^s D(t)dt$$
$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|z-t|^2}\right)^s D(t)dt$$
$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{|z-t|^2}\right)^s D(t)dt$$

avec $U(t) = |ct+d|^{2s-2} U\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)$.

6 Fonctions et polynômes de périodes

Soit $l \geq 1$.

Définition 6.0.1. Soit f une forme de cusp de poids $2k$: $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$. On appelle *polynôme de période de* f le polynôme $r_f \in \mathbb{C}_{2k-2}[X]$ donné par une des expressions équivalentes suivantes :
(i) $r_f(z) = C_k \left(\tilde{f}(z) - z^{2k-2}\tilde{f}\left(\frac{-1}{z}\right)\right)$ $(z \in \mathbb{H})$ où $\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{2k-1}} e^{2\pi i n z}$ est *l'intégrale d'Eichler de* f ;
(ii) $r_f(X) = C'_k \int_0^{i\infty} f(y)(y-X)^{2k-2}dy$;
(iii) $r_f(X) = C''_k \sum_{r=0}^{2k-2} \frac{(-2\pi i)^{-r}}{(2k-2-r)!} L(a)(r+1)X^r$.

Soient

$$P_{2k-2} = \{p \in \mathbb{C}_{2k-2}[X] \mid \forall \gamma \in PSL(2,\mathbb{Z}), p|_{2-2k}\gamma = p\}$$

et

$$W_{2k-2} = \left\{p \in P_{2k-2} \mid p|(1+S) = 0, p|(1+U+U^2) = 0\right\}$$

Théorème 6.0.2.
(i) $W_{2k-2} \subset FE_{1-k}$;
(ii) Si $k > 1$, $FE_{1-k} \cap \mathbb{C}_{2k-2}[X] \subset W_{2k-2}$.

Références

[LZ01] John B. Lewis and Don Zagier. Period functions for Maass wave forms. I. *Annals of Mathematics*, 153 :191–258, 2001.