Université de Bordeaux
L3 Mathématiques Fondamentales, Groupe A2

Equations différentielles et calcul différentiel

Devoir Maison : Modèle Proie-Prédateurs

Le devoir maison est à rendre en séance de TD. Il peut être fait seul·e ou en petit groupe.

On considère l'équation différentielle suivante, en deux dimensions :

$$(LV)\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases}$$

où les constantes a, b, c, d sont positives. Typiquement x est le nombre de petits lapins mignons aux carottes renouvelables, et y est le nombre de renards carnivores.

1. Le système est-il linéaire ?
2. Montrer que le problème admet une unique solution maximale.
3. Montrer que l'énergie $H(x, y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ est constante par rapport au temps.
4. (*)En déduire que la solution maximale est bornée.
5. En déduire que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que si $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout t. Que dire de y dans ce cas là. Même question si $y(t_0) = 0$ en inversant les rôles.
7. Montrer que si $x(0)$ et $y(0)$ sont non nuls, alors ils ne s'annulent jamais.
8. Déterminer les points d'équilibre de l'équation. Etudier leur stabilité

   On se place maintenant dans le cas $x(0), y(0) > 0$.
9. Pourquoi les solutions restent-elles strictement positives ?

   On découpe l'espace $(0, \infty) \times (0, \infty)$ en quatre secteurs comme indiqué en Figure 1. On souhaite démontrer que les solutions de l'équation sont périodiques. On suppose sans perte de généralité que $X(0) \in I$.
10. Compléter le portrait de phase en Figure 1.
11. Montrer qu'il existe des temps $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ tels que :
    — entre 0 et t_1, X est dans I,
    — entre t_1 et t_2, X est dans II,
    — entre t_2 et t_3, X est dans III,
    — entre t_3 et t_4, X est dans IV,
    — entre t_4 et T, X est dans I,
    — $y(t_1) = y(T)$.
    et tracer l'allure de $X(t)$ sur la Figure 1.
12. En utilisant l'énergie, montrer que $X(t_1) = X(T)$.

13. Montrer que $X(t)$ et $X(t - t_1 + T)$ vérifient le même problème de Cauchy.
14. En déduire que X est périodique. Donner une période.
15. Calculer les moyennes de populations de lapins et de renards sur la période.
16. Les vllageois·es décident de chasser pour se nourrir. On modélise cette chasse en modifiant ainsi l'équation :

$$(LV_2) \begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t) - \alpha) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t) - \alpha) \end{cases}$$

Quelles sont les nouvelles moyennes de population sur une période ? Les comparer aux premières moyennes. Commenter.

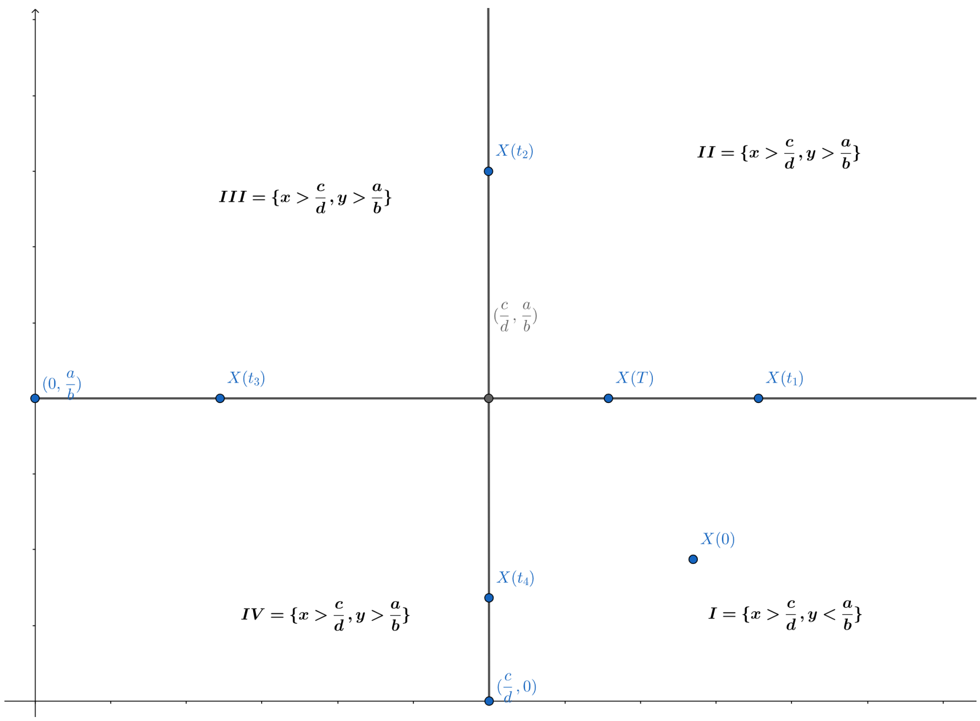

Figure 1 – Portrait de phase et allure des solutions.