Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 1 - Quelques équations différentielles.

Exercice 1. (**Equations différentielles linéaires du premier ordre**) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(x) = xy(x); \qquad y'(x) = \frac{1}{x}y(x); \qquad y'(x) = x^2y(x);$$
$$y'(x) = \frac{1}{x^2}y(x); \qquad y'(x) = e^x y(x); \qquad y'(x) = \frac{xy(x)}{\sqrt{4-x^2}};$$
$$y'(x) = \ln(x)y(x); \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)y(x).$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :

$$y' = 5y, \quad y' + 3x^2y = x^2, \quad x^2y' + xy = 1, \quad xy' - y = x^2\sin(x).$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :

$$xy' - y = 2x^2,\ y(1) = 5, \quad xy' + y = e^x,\ y(1) = 2.$$

Exercice 4.

1. Trouver la solution continue de

$$y' + y = f(x), \quad y(0) = 0$$

   où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f = 1$ sur $[0, 1]$ et $f = 0$ sur $]1; +\infty[$.
2. Cette solution est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 5. On considère l'équation

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2 \qquad (E_1)$$

1. Trouver $\alpha > 0$ tel que $y_0(x) = \alpha x$ soit solution particulière de (E_1).
2. On effectue le changement de variables $y(x) := y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$. Quelle équation différentielle (E_2) vérifie z ?
3. Résoudre (E_2), puis (E_1), sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = e^x$

2. $y'' - y = -6\cos(x) + 2x\sin(x)$.
3. $4y'' + 2y' + 5y = \sin(x)e^{-x/2}$
4. $y'' + 2y' + 4y = xe^{x}$, $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.

Exercice 7. Que dire de $y' = y^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$?

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle

$$t^2 y' = y^2 - 2t^2.$$

On pourra utiliser le changement de variable $z = \frac{y}{t}$.

Exercice 9. On envisage l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On va montrer l'existence et l'unicité de la solution à cette équation (cette solution n'est pas exprimable à l'aide de fonction élémentaire).

1. (Préliminaire) Démonter l'inégalité suivante : $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+$, avec $c \geq b$, $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \leq c - b$.
2. (Existence) On définit la suite (f_n) de fonction sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(x) = 0$ et pour $n \geq 1$,
$$f_n(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}\, dt.$$
   (a) Montrer que pour $n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et strictement croissante et que
$$0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (b) Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction continue f vérifiant
$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq e^x - x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$
   (c) Montrer que la suite des dérivées (f_n') vérifie pour $n \geq 1$
$$0 \leq f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \leq f_n(x) - f_{n-1}(x).$$
   En déduire que f est une fonction de calsse $\mathcal{C}^1$, vérifiant 1.
3. (Unicité) On suppose que y_1 et y_2 sont deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ de 1. On pose $\delta = (y_1 - y_2)^2$. Montrer que la fonction $x \mapsto \delta(x)e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Conclure.