Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 3 - Exponentielles de matrices

Exercice 1 (Pendule pesant - niveau 1)**.** On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynome caractéristique de A.
2. Calculer e^{tA}, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$
avec la condition initiale $x(0) = 0, y(0) = 0$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de
$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Exercice 2. Calculer e^tA pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Exponentielles sans douleur)**.**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$e^{tA} = a_t A + b_t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. Déterminer a et b lorsque les deux valeurs propres sont distinctes.
3. Si A possède une valeur propre double, λ, montrer que $e^{tA} = e^{t\lambda}\left[I + t(A - \lambda I)\right]$.
4. Généraliser aux matrices, de dimension n, vérifiant $(A - \lambda I)^n = 0$.

Exercice 4.

1. Trouver des matices A et B telles que $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. Sous quelle condition a-t-on $e^{A+B} = e^A e^B$

Exercice 5. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

1. Donner une solution évidente de (S).
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   i) Exprimer le detreminant et la trace de A en fonction de ses valeurs propres.
   ii) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$?
   iii) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$?
3. En déduire que si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$, alors toute solution de (S) converge vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 6. Calculer e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = x(t) + e^t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^{(3)} - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

Exercice 9. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0$$

1. Transformer cette équation d'ordre 4 en une équation d'ordre 1 $X' = AX$ avec A une matrice A à définir.
2. Trigonaliser A et calculer e^{tA}.
3. Donner l'ensemble des solution de (E).