Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel

TD 4 - Quelques propriétés qualitatives des solutions d'équations différentielles

Exercice 1 (Zéros isolés)**.** Soient $a_0, a_1, ..., a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution de l'équation différentelle $y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)}$ a ses zéros isolés.

Exercice 2 (Wronskien et zéros de solutions)**.** Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soient f et g deux solutions de l'équation différentielles

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

On définit *le Wronskien* $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

1.a Quelle est l'équation différentielle vérifée par W. La résoudre.

1.b Montrer que si g et f, sont linéairement indépendantes alors W ne s'annule jamais.

1.c Montrer que W est nulle si et seulement si elle n'annule en un point.

1.d Dans le cas où f et g sont linéairement indépendantes, montrer qu'entre deux zéros de f la fonction g s'annule exactement une fois.

On se place maintenant dans le cas $p = 0$. Soit f une solution non identiquement nulle de (E). En étudiant la fonction $J = f'z - z'f$ où z vérifie $z'' = -M^2 z$, montrer que

2.a Si $q(t) \leq M^2$, alors deux zéros consécutifs de M sont distants d'au moins $\frac{\pi}{M}$.

2.b Si $q(t) \geq M^2$, alors pour tout intervalle I de longueur $\frac{\pi}{M}$, f admet au moins un zéro dans I.

On considère l'équation

$$(B) : y'' + \frac{1}{t}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{t^2})y = 0.$$

définie pour $t \geq 0$. Soit f une solution non identiquement nulle de (B).

3.a Se ramener à la forme précédente.

3.b Selon la valeur de λ, que peut-on dire de la distance entre deux zéros consécutifs de f.

Exercice 3. 1. Trouver des matices A et B telles que $e^{A+B} = e^A e^B$.

2. Sous quelle condition a-t-on $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$. *Indication : dériver deux fois l'égalité.*

Exercice 4. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

1. Donner une solution évidente de (S).
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   i) Exprimer le déterminant et la trace de A en fonction de ses valeurs propres.
   ii) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$?
   iii) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$?
3. En déduire que si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$, alors toute solution de (S) converge vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.
4. Que dire quand $det(A) < 0$? Montrer qu'il existe des solutions qui tendent vers $(0, 0)$ et d'autres dont la norme tend vers l'infini.
5. Si $det(A) > 0$ et $Tr(A) = 0$, que peut on dire des valeurs propres ? Montrer que les solutions sont bornées. Montrer qu'il existe des solutions périodiques. Sont-elles toutes périodiques ?

Exercice 5 (Lemme de Gronwall)**.**
Soient ψ et $\phi \geq 0$ deux fonctions continues. Soit K une constante positive. On suppose que
$$\forall t > t_0, \psi(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds.$$
Montrer que
$$\forall t > t_0, \psi(t) \leq Kexp\left(\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right).$$
Application : Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy linéaire.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle $x'(t) = sin(tx(t))$.
1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale.
2. Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'elle est paire.