Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 5 Propriétés qualitatives (2)

Exercice 1 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soient $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une unique solution globale.

Exercice 2. Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéesse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t)^2 \\ y'(t) = x(t)y(t) - y(t) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Monter que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (X, I).
2. En utilisant l'énergie $H(x, y) = x^2 + 2y^2$, monter que cette solution est, en fait, globale.

Exercice 3 (maximale + bornée = ...)**.** Soient $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} x'(t) = v(x(t)), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. On suppose que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \langle v(x), x \rangle \leq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution globale au problème (P).
2. On suppose, à présent, que $\forall\, \|x\| = 1,\ \langle v(x), x \rangle < 0$. Montrer que si x_0 est dans la boule unité, la solution maximale de (P) reste dans cette boule. En déduire qu'elle est globale.
3. Montrer que le résultat de la question précédante persiste si l'on suppose seulement $\forall\, \|x\| = 1,\ \langle v(x), x \rangle \leq 0$. On pourra comparer la solution maximale de (P) à celle de (P_ε) où v est remplacée par $v_\varepsilon(x) = v(x) - \varepsilon x$.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy suivant : pour $x \geq 0$, $(E) y' = y^2 - x,\ y(0) = 0$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution maximale. On la notera $(y, [0, T[)$, avec $T \in \bar{\mathbb{R}}$.
2. Donner un equivalent simple de y en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, T[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$, on ait $y^2(x) < x$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0, T[$, on a $y^2(x) < x$.
4. En déduire que $b = +\infty$.