Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 6 - Propriétés qualitatives (3)

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $x' = t+x^2$. On se donne une condition initale $x(0) = x_0$.

1. Montrer que le problème admet une unique solution maximale, et que celle-ci est croissante.
2. Supposons par l'absurde que l'intervalle maximal n'est pas majoré, montrer que
$$\forall t > 1, \quad \arctan(x(t)) - \arctan(x(1)) \geq t - 1.$$
3. En déduire que I est majoré.
4. Donner une équivalent de $x(t)$ en b.

Exercice 2. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = e^{-tx}$ avec la donnée initiale $x(0) = 0$.

1. Montrer que l'unique solution maximale est impaire et strictement croissante.
2. Montrer que l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.
3. Montrer que te^{-tx} est intégrable sur $[0, \infty)$.
4. En déduire que x admet une limite en $+\infty$. On la note l.
5. Montrer que $l > 1$.

Exercice 3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $M \geq 0$ si tous les coefficients de M sont strictement positifs et $M \geq 0$ si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On fait de même pour les vecteurs. Soit $A : [0, \infty[\to M_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que pour tout $t \geq 0$, $A(t) \geq 0$.

1. Montrer que si Y est solution de $Y' = A(t)Y$ avec $Y(0) > 0$, alors pour tout $t > 0$, $Y(t) > 0$.
2. Montrer qu'il existe une solution à $Y' = -A(t)Y$ avec $Y(t) \geq 0$ quelque soit $t \geq 0$.