Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 7 - Différentielles.

Dans tout le TD, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E, F et G sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 1 (A savoir absolument)**.**

1. Montrer qu'une fonction $f : I \to E$ est différentiable si et seulement si elle est dérivable. Déterminer sa différentielle en $d_x f$ quelque soit x dans I.
2. Soit T une application linéaire de E dans F. Montrer que T est différentiable et déterminer sa différentielle $d_x T_2$.
3. Soit T_2 une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Montrer que T_2 est différentiable et déterminer sa différentielle $d_{(x,y)} T$.
4. Soit T_n une application n-linéaire de $E_1 \times ... \times E_n$ dans F. Montrer que T_n est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice 2 (Fonctions à plusieurs variables et dérivées partielles)**.** Les fonction suivantes, définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont admettent elles des dérivées partielles et/ou directionnelles en tout point ? Sont-elles différentiables ?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)(e^y-1)}{x^2+y^2} & \text{si} \\ (x,y) \neq (0,0) & \\ 0 & \text{si} \\ (x,y) = (0,0) & \end{cases}$$

$$f_6(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+xy^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 3 (Applications matricielles)**.** Déterminer les différentielles en tout point des applications suivantes définies de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui même.

$$f_1 : A \mapsto A^T, \quad f_2 : A \mapsto A^T A, \quad f_3 : A \mapsto A^2, \quad f_4 : A \mapsto A^k$$

Déterminer les différentielles des applications suivantes, définies de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

$$g_1(A,B) = AB, \quad g_2(A,B) = AB^T, \quad g_3(A,B) = AB^2$$

Exercice 4 (Deux exemples de composition)**.**

1. Calculer la différentielle de $t_k : A \mapsto tr(A^k)$ définie de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : x \mapsto \int_0^x \sin(tx)dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différientielle en tout point.

Exercice 5 (Exponentielle de matrice)**.** Montrer que $exp : A \mapsto e^A$ définie sur $M_n(\mathbb{R})$ est différentiable. Déterminer sa différentielle en O_n. En déduire la différentielle de $f : (t,A) \mapsto exp(tA)$ (définie de $\mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$) en tout point de la forme (t, O_n).

Exercice 6 (Inversion de matrice)**.** Soit $i : A \mapsto A^{-1}$ la fonction inverse définie sur $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que i est différientiable en I_n, déterminer sa différentielle.
2. en écrivant $(A+H)^{-1} = (A(I + A^{-1}H))^{-1}$, montrer que i est différentiable en tout point et calculer cette différentielle.

Exercice 7 (Déterminant)**.** Soit $Det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant.

1. Montrer que pour toute matrice H, $d_{I_n}Det(H) = Tr(H)$.
2. En déduire la différentielle de Det en toute matrice inversible M.
3. Par densité, en déduire la différentielle de Det en toute matrice.
4. Application : soient $y_1, y_2, ..., y_n$ des solutions de l'équation $y'(t) = A(t)y(t)$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $Det(y_1, ..., y_n)$? La résoudre.

Exercice 8 (Fonctions homogènes)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, on a : $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Montrer que f est homogène si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler : $d_x f.x = \alpha f(x)$.

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On pose $u : x \mapsto f(x, -x)$ et $v : (x,y) \mapsto f(y,x)$. Déterminer les différentielles de u et v.
2. Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ une fonction différentiable. Pour $a \in U$ et $v \in E$, on définit $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$. Déterminer $\varphi'(0)$.

Exercice 10 (Inversion dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)**.** L'inversion est l'application f de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans lui même définit par :

$$\|x\| = \|f(x)\| \quad \text{et} \quad \exists \lambda > 0, f(x) = \lambda x.$$

1. Calculer la différentielle de f.
2. Intérpréter géométriquement $d_x f$ et en déduire que l'inversion préserve les angles. (On pourra considérer la symétrie orthogonal par rapport à l'hyperplan $x^\perp$).