Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
TD 8 - Inversion locale, fonctions implicites

Exercice 1 (un contre-exemple utile)**.** On considère la fonction $f(x) = x + x^2 sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Commenter.

Exercice 2. On considère l'équation $(E) \sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$. Montrer qu'il existe U et V deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que pour tout x dans U, $(x, \phi(x))$ est l'unique solution dans $U \times V$. Donner le développement limité à l'ordre à l'ordre 7 de φ en 0.

Exercice 3 (Racine et logarithme)**.**

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $\|I_n - A\| < \alpha$ admette une racine dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, l'exponentiel matricielle est un difféomorphisme local. Est-il global ?

Exercice 4 (Un peu d'EDO)**.** Une équation différentielle de la forme $p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$ est dite exacte si il existe $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $\nabla g = (p, q)$. Les solutions d'une telle équation vérifient $g(x, y(x)) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$ une constante, ce qui permet de résoudre.

1. Montrer que $(E)\, 2y^2(x) + 2xy(x)y'(x) = 0$ n'est pas exacte.
2. Déterminer $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'équation $2\mu(x)y^2(x) + 2\mu(x)xy(x)y'(x) = 0$ soit exacte. Résoudre (E).
3. Mêmes questions pour $(2x + \sin(2x)) \sin(y) \cos(y) + (x^2 + \sin(x)^2)y'(x) = 0$ (facteur intégrant de la forme $\mu(y)$).

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe k tel que

$$\forall (x, y),\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

1. Montrer que f est injesctive et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout x, $d_x f$ est inversible.
3. En déduire que f est un C^1-difféomorphisme global.

Exercice 6 (Réduction des formes quadratiques et lemme de Morse)**.**

1. Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^t A_0 M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que φ est différentiable en I_n. Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\varphi$.

b) Montrer qu'il existe V, voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $M \in V$, $M = \psi(M)^t A_0 \psi(M)$.

2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $d_0 f = 0$ et $d_0^2 f$ est de signature $(p, n-p)$.

   a) Montrer qu'il existe $Q : U \to \mathcal{S}_n(R)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in U$, $f(x) = x^t Q(x) x$.

   b) Montrer qu'il existe un difféomorphisme u entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$, Ω_1 et Ω_2 tel que $f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$.