Université de Bordeaux
Licence de Mathématiques 2020-2021, L3.

Equations différentielles et calcul différentiel
Supplément 1 - Quelques exercices sur le théorème d'Ascoli

Exercice 1. (Fonctions Hölderiennes.)
Pour $\alpha \in (0,1)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on définit

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s\in[a,b],t\neq s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

et on pose $C^\alpha([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : [f]_\alpha < \infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$.

1. Montrer que $(C^\alpha([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.
2. Montrer que la boule unité fermée de C^α est un compact de $C([a,b])$.
3. Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer que pour tout $f \in C^\beta$ et tout $\eta > 0$,

$$|f|_\alpha \leq \max\left(2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}, \eta^{\beta-\alpha}[f]_\beta\right).$$

   En déduire que si (f_n) est une suite bornée de C^β qui converge uniformément (i.e. en norme $\|\cdot\|_\infty$) vers $f \in C^\beta$ alors (f_n) converge vers f dans C^α.
4. Montrer que pour $0 \leq \alpha < \beta < 1$, la boule unité de $C^\beta([a,b])$ est compacte dans $C^\alpha([a,b])$. *Remarque : on dit que le plongement $C^\beta([a,b]) \hookrightarrow C^\alpha([a,b])$ est compact.*

Exercice 2. (Un exemple d'opérateur compact.)
Sur $X = C([a,b],\mathbb{R})$ et $k \in C([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$. Sur X on définit l'application

$$T(f) = \int_a^b k(s,t)f(t)\mathrm{d}t, \forall f \in X.$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue de X dans X.
2. Rappeler pourquoi la boule unité $B_X(0,1)$ de X n'est pas compacte.
3. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
4. En déduire que $T(B_X(0,1))$ est équicontinue.
5. Montrer que $T(B_X(0,1))$ est d'adhérence compacte.