Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 1 - Norme et complétude

Exercice 1.1.1. Montrer que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1..n\}$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in (1, \infty)$. Montrer que $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Une indication pour l'inégalité triangulaire: soit $a, b > 0$ et $f(t) = a^p t^{1-p} + b^p (1-t)^{1-p}$. Montrer que f admet un minimum $m_{a,b}$ sur $(0, 1)$, puis le calculer en fonction de a, b. Utiliser l'inégalité $m_{a,b} \leq f(t)$ pour le choix $a = |x_i|$ et $b = |y_i|$ d'abord, puis sommer sur i. Ensuite minimiser sur le paramètre t pour conclure.

Exercice 1.1.2. Soit E un e.v.n.. Rappelons la notation $B(x, r)$ pour la boule ouverte autour de x de rayon r et $B[x, r]$ pour la boule fermée autour de x de rayon r. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée.

Exercice 1.1.3. Soit E un e.v.n. et A une partie non-vide de E. Soit $L = \{\lim a_n : (a_n) \in A^{\mathbb{N}}\}$ l'ensemble des limites de suites de A. Montrer que $L = \overline{A}$.

Exercice 1.1.4. Soit $x_n = \sqrt{n}$. Montrer que $(x_{n+1} - x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. S'agit il d'une suite de Cauchy?

Exercice 1.1.5. Soit (x_n) une suite de Cauchy qui admet une sous-suite extraite convergente. Montrer que (x_n) converge vers la limite de cette sous-suite.

Exercice 1.1.6. Soit E un espace de Banach et Ω un ensemble.

a) Montrer que les fonctions bornées sur Ω à valeur dans E, noté

$$\mathcal{B}(\Omega; E) = \{f : \Omega \to E : f \text{ bornée}\},$$

forment un espace vectoriel.

b) Montrer que $\|f\|_\infty = \sup\{f(\omega) : \omega \in \Omega\}$ est une norme sur $\mathcal{B}(\Omega; E)$.

c) Identifier $\mathcal{B}(\{1, \ldots, n\}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$.

d) Montrer que $\mathcal{B}(\Omega; E)$ est complet pour la norme $\|.\|_\infty$.

Exercice 1.1.7. Soit E un espace de Banach et A un s.e.v. fermée de E. Montrer que A, muni de la norme de E (restreinte à A) est un espace de Banach.

Exercice 1.1.8. Montrer que $C([a, b])$ est un s.e.v. fermée de $\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$. En déduire que $C([a, b])$ est complet.