Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 2 - Norme et complétude

Exercice 1.1.9. Pour une matrice A de dimension $n \times n$ soit $\|A\| = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

a) Justifier que $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.
b) Déduire que $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est une série convergente, et que $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.
c) Que se pass-t-il si on munit $\mathbb{R}^{n \times n}$ d'une autre norme?

Exercice 1.1.10. On dénote $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Soit $A = (a_{j,k})$ une matrice $n \times n$. Expliciter en termes des coefficients $a_{j,k}$ la norme d'opérateur de A, vu comme opérateur linéaire $A : \ell_1^n \to \ell_1^n$. Même question pour la norme d'opérateur de $A : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$.

Exercice 1.1.11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.
a) Démontrer que l'application $\|.\|$ est une norme sur E. Dans les questions suivantes, E est muni de cette norme.
b) Soit c un réel positif et L l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L(P) = P(c)$. Démontrer que L est linéaire et continue si et seulement si $c \in [0,1]$. Calculer la norme de L lorsque L est continue.
c) L'application $P \to P'$ est elle continue sur E ?

Exercice 1.1.12. Soit $X = C([0,1])$ muni de la norme sup et $Y = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_Y = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. On définit $T : X \to \mathbb{R}$ par $Tf = f(0)$. Montrer que T est linéaire et borné, puis calculer $\|T\|$. Qu'en est il de $T : Y \to \mathbb{R}$?

Exercice 1.1.13. Soit $E = C([0,\pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x)|$. On désigne par φ un élément fixé de E et par T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)\, dx.$$

a) Démontrer que T est linéaire et continue.
b) Calculer la norme de T lorsque φ est φ est ≥ 0.
c) Calculer la norme de T lorsque φ est la fonction $x \to \cos x$.

Exercice 1.1.14. Soit $J : C([0,1]) \to C([0,1])$ donné par $(Jf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que J est linéaire et borné, puis calculer $\|J\|$.

Exercice 1.1.15. Soit $X = \{f \in C([0,1]) : f(1) = 0\}$ muni de la norme sup. Soit $T : X \to X$ donné par $(Tf)(x) = xf(x)$. Montrer que T est linéaire et borné, puis calculer $\|T\|$.

Exercice 1.1.16. Montrer que les concepts “ouvert”, “fermé”, “borné”, “compact” pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ne dépendent pas de la norme choisie.

Exercice 1.1.17. Soit $(E, \| \ . \ \|)$ un espace vectoriel normé. Prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :

a) L’ensemble vide est compact.
b) Un singleton est compact.
c) Un ensemble fini est compact (on pourra commencer par un ensemble à deux éléments).
d) Un ensemble dénombrable est compact.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des compacts de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x,y),\ 2x^2 + 3y^2 < 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y),\ 0 \leq x, y \ \text{ et } \ xy \leq 1\}.$$

Pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :

a) Une intersection d’ensembles compacts est compacte.
b) Un ensemble compact est fermé.
c) Un sous-ensemble fermé d’un ensemble compact est compact.
d) Une union finie d’ensembles compacts est compacte (on pourra commencer par deux ensembles compacts).
e) Une union quelconque d’ensembles compacts est compacte.

Exercice 1.1.18. Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $r > 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme usuelle $\| \ . \ \|$ définie par $\|x\| = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2}$. La boule fermée de centre x et de rayon r vaut $B_f(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|y - x\| \leq r\}$. Montrer que $K_r := \bigcup_{x \in K} B_f(x,r)$ est compact.