Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

# TD
# Equations différentielles et calcul différentiel
## Feuille 3 - Calcul différentiel

**Exercice 1.1.16.** Montrer que les concepts "ouvert", "fermé", "borné", "compact" pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ne dépendent pas de la norme choisie.

**Exercice 1.1.17.** Soit $(E, \| \ . \ \|)$ un espace vectoriel normé. Prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :
a) L'ensemble vide est compact.
b) Un singleton est compact.
c) Un ensemble fini est compact (on pourra commencer par un ensemble à deux éléments).
d) Un ensemble dénombrable est compact.
Les sous-ensembles suivants sont-ils des compacts de $\mathbb{R}^2$ ?

$$A = \{(x, y),\ 2x^2 + 3y^2 < 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x, y),\ 0 \le x, y \ \text{ et } \ xy \le 1\}.$$

Pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :
a) Une intersection d'ensembles compacts est compacte.
b) Un ensemble compact est fermé.
c) Un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.
d) Une union finie d'ensembles compacts est compacte (on pourra commencer par deux ensembles compacts).
e) Une union quelconque d'ensembles compacts est compacte.

**Exercice 1.2.1.** Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^4}.$$

**Exercice 1.2.2.** Etudier l'éventuelle continuité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Exercice 1.2.5.** Soit $f(x,y) = \max(e^x \sin(\mathrm{Arctan}(y)), \ln(1+x^2+y^4))$. Montrer que $f$ admet un maximum sur l'ensemble $A = \{(x,y),\ x^{16}+y^{16} = 64\}$ (n'essayez-pas de le calculer !). Montrer que $f$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Donnez-le sans calculs (ou presque) !

**Exercice 1.2.13.** Chacune des fonctions suivantes est-elle différentiable (ou Fréchet-différentiable) sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ? Calculer sa différentielle (de Fréchet) $D_f(a)$ en tout point $a$ de l'ouvert où elle est différentiable.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y,z) = (x^2z - 2xy, z^3 + xyz)$.
c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (y\sin(x), \cos(x))$.

**Exercice 1.2.14.** Considérons les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sont-elles partiellement différentiables ? (Fréchet-)différentiables ? ou bien même de classes $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)(e^y-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$f_6(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+xy^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$