Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 4 - Calcul différentiel

Exercice 1.2.39. (**A savoir absolument**) Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E, F, G sont des espaces vectoriels de dimension finie.

a) Montrer qu'une fonction $f : I \to E$ est différentiable si et seulement si elle est dérivable. Déterminer sa différentielle en $d_x f$ quelque soit x dans I.
b) Soit T une application linéaire de E dans F. Montrer que T est différentiable et déterminer sa différentielle $d_x T$.
c) Soit T_2 une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Montrer que T_2 est différentiable et déterminer sa différentielle $d_{(x,y)} T_2$.
d) Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimension finie. Soit T_n une application n-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F. Montrer que T_n est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice 1.2.40. (**Applications matricielles**) Déterminer les différentielles en tout point des applications suivantes définies de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui même.

$$f_1 : A \mapsto A^T, \quad f_2 : A \mapsto A^T A, \quad f_3 : A \mapsto A^2, \quad f_4 : A \mapsto A^k$$

Même questions pour les applications suivantes, définies de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

$$g_1(A, B) = AB, \quad g_2(A, B) = AB^T, \quad g_3(A, B) = AB^2$$

Exercice 1.2.41. (**Deux exemples de composition**)

a) Calculer la différentielle de $t_k \colon A \mapsto tr(A^k)$ définie de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
b) Soit $f \colon x \mapsto \int_0^x \sin(tx)dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 1.2.42. (**Fonctions homogènes**) Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, on a : $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Montrer que f est homogène si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler : $d_x f.x = \alpha f(x)$.

Exercice 1.2.43. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On pose $u : x \mapsto f(x, -x)$ et $v : (x, y) \mapsto f(y, x)$. Déterminer les différentielles de u et v.
b) Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ une fonction différentiable. Pour $a \in U$ et $v \in E$, on définit $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$. Déterminer $\varphi'(0)$.

Exercice 1.2.44. (**Exponentielle de matrice**) Montrer que $\exp\colon A \mapsto e^A$ définie sur $M_n(\mathbb{R})$ est différentiable. Déterminer sa différentielle en la matrice nulle 0_n. En déduire la différentielle de $f\colon (t, A) \mapsto \exp(tA)$ (définie de $\mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$) en tout point de la forme $(t, 0_n)$.

Exercice 1.2.45. (**Inversion de matrice**) Soit $i : A \mapsto A^{-1}$ la fonction inverse définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $\|H\| < 1$, $(I_n - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k$.

b) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

c) Montrer que i est différentiable en I_n, déterminer sa différentielle.

d) En écrivant $(A + H)^{-1} = (A(I + A^{-1}H))^{-1}$, montrer que i est différentiable en tout point et calculer cette différentielle.

Exercice 1.2.46. (**Déterminant**) Soit $\det\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant.

a) Montrer que pour toute matrice H, $d_{I_n}\det(H) = \mathrm{Tr}(H)$.

b) En déduire la différentielle de det en toute matrice inversible M.

c) Par densité, en déduire la différentielle de det en toute matrice.

d) Application : soient $y_1, y_2, ..., y_n$ des solutions de l'équation $y'(t) = A(t)y(t)$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\det(y_1, ..., y_n)$? La résoudre.

Exercice 1.2.47. (**Inversion dans** $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$) L'inversion est l'application f de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans lui-même définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

a) Calculer la différentielle de f.

b) Interpréter géométriquement $d_x f$ et en déduire que l'inversion préserve les angles. (On pourra considèrer la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x^\perp$).

Exercice 1.2.49. On considère l'équation (E) $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$. Montrer qu'il existe U et V deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que pour tout x dans U, $(x, \phi(x))$ est l'unique solution dans $U \times V$. Donner le développement limité à l'ordre 7 de φ en 0.

Exercice 1.2.50. (**Racine et logarithme**)

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $\|I_n - A\| < \alpha$ admette une racine carrée dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'au voisinage de 0, l'exponentielle matricielle est un difféomorphisme local. Est-il global?

1.3 Quelques exercices en dimension infinie

Exercice 1.3.1. (**Un exemple linéaire**) Soit $X = \{f \in C([0, \pi/2]), f(\pi/2) = 0\}$ muni de la norme sup. Montrer que l'application $J : f \mapsto J(f)(x) = sin(x)f(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle. Déterminer $\|d_f J\|$.

Exercice 1.3.2. Soit $X = C(\mathbb{R})$ muni de la norme sup. Montrer que l'application $\psi : f \mapsto exp(f)$ est différentiable et calculer sa différentielle. Quelle est la norme de $d_f(\psi)$?

Exercice 1.3.3. Soit $p \geq 1$. Soit $X = C([0,1])$ muni de la norme sup. Montrer que l'application $J : f \mapsto \int_0^1 f(t)^p dt$ (définie de X dans $\mathbb{R}$) est différentiable. Déterminer $d_f J$.