Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 5 - Équations différentielles de degré 1

Équations différentielles séparables

Exercice 2.1.1. (**Equations différentielles séparables**). Résoudre les équations différentielles suivantes, où $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable:
a) $y' = 2y$; b) $y'y = 1$; c) $y'y^2 = t$; d) $y' = y^2$; e) $y' = y + y^2$;
f) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3\ln t + 1}{t \ln t}$; g) $y' + (\tan t)y = 0$; h) $(t^2 + 1)y' - 2ty = 0$;
i) $t(t^2 + t + 1)y' - (t^2 - 1)y = 0$; j) $(6t^2 + t - 1)y' - 5y = 0$.

Exercice 2.1.2. (**Equations différentielles séparables**). Résoudre les équations suivantes (déterminer les solutions maximales définies en $t = 0$) :

$$y' = \frac{\pi}{4}\cos(t)(1 + y^2); \qquad y' = (1 - y)y;$$
$$y' = t\sqrt{1 - y^2}; \qquad y'y^2 = t.$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 2.1.6. (**Equations différentielles linéaires du premier ordre**) Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y'(x) = xy(x); \qquad y'(x) = \frac{1}{x}y(x); \qquad y'(x) = x^2y(x);$$
$$y'(x) = \frac{1}{x^2}y(x); \qquad y'(x) = e^x y(x); \qquad y'(x) = \frac{xy(x)}{\sqrt{4 - x^2}};$$
$$y'(x) = \ln(x)y(x); \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)y(x).$$

Exercice 2.1.7. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :

$$y' = 5y, \quad y' + 3x^2y = x^2, \quad x^2y' + xy = 1, \quad xy' - y = x^2\sin(x).$$

Exercice 2.1.8. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :

$$xy' - y = 2x^2,\ y(1) = 5, \quad xy' + y = e^x,\ y(1) = 2.$$

Exercice 2.1.9.

a) Trouver la solution continue de

$$y' + y = f(x), \quad y(0) = 0$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f = 1$ sur $[0, 1]$ et $f = 0$ sur $]1; +\infty[$.

b) Cette solution est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 2.1.10. On considère l'équation

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2 \qquad (E_1)$$

a) Trouver $\alpha > 0$ tel que $y_0(x) = \alpha x$ soit solution particulière de (E_1).

b) On effectue le changement de variables $y(x) := y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$. Quelle équation différentielle (E_2) vérifie z ?

c) Résoudre (E_2), puis (E_1), sur $]0, +\infty[$.