Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 6 - Problèmes d'existence et d'unicité

Exercice 2.2.39. On envisage l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On va montrer l'existence et l'unicité de la solution à cette équation (cette solution n'est pas exprimable à l'aide de fonction élémentaire).

i. (Préliminaire) Démonter l'inégalité suivante : $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+$, avec $c \geq b$, $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \leq c - b$.

ii. (Existence - théorique) Que le Théorème de Cauchy-Péano nous permet-il de dire sur cette équation différentielle ?

iii. (Existence - construction) On définit la suite (f_n) de fonction sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(x) = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}\, dt.$$

(a) Montrer que pour $n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et strictement croissante et que

$$0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction continue f vérifiant

$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq e^x - x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

(c) Montrer que la suite des dérivées (f_n') vérifie pour $n \geq 1$

$$0 \leq f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \leq f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant 1.

iv. (Unicité) On suppose que y_1 et y_2 sont deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ de 1. On pose $\delta = (y_1 - y_2)^2$. Montrer que la fonction $x \mapsto \delta(x)e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Conclure.

Exercice 2.2.40. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0$$

i. Montrer que cette équation différentielle admet une solution.

ii. Montrer que celle-ci n'est pas unique et trouver toutes les solutions.

Exercice 2.2.41. Que dire de $y' = y^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$?