Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 7 - Théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème des bouts

Exercice supplémentaire 1. (**Retour vers la feuille 5**) Résoudre le problème de Cauchy
$$y' = y + y^2, \quad y(t_0) = -1.$$

Exercice 2.4.4. Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t)^2 \\ y'(t) = x(t)y(t) - y(t) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Monter que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (X, I).
2. En utilisant l'énergie $H(x, y) = x^2 + 2y^2$, monter que cette solution est, en fait, globale.

Exercice 2.4.8. (**Zéros isolés**) Soient $a_0, a_1, ..., a_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution de l'équation différentelle $y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)}$ a ses zéros isolés.

Exercice 2.4.9. Soient $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :
$$(P) \begin{cases} x'(t) = v(x(t)), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. On suppose que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \langle v(x), x\rangle \leq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution globale au problème (P).
2. On suppose à présent, que $\forall\ \|x\| = 1,\ \langle v(x), x\rangle < 0$. Montrer que si x_0 est dans la boule unité, la solution maximale de (P) reste dans cette boule. En déduire qu'elle est globale.
3. Montrer que le résultat de la question précédente persiste si l'on suppose seulement $\forall\ \|x\| = 1,\ \langle v(x), x\rangle \leq 0$. On pourra comparer la solution maximale de (P) à celle de (P_ε) où v est remplacée par $v_\varepsilon(x) = v(x) - \varepsilon x$.

Exercice 2.4.10. On considère le problème de Cauchy suivant, pour $x \geq 0$:

$$(E) \quad y' = y^2 - x, \quad y(0) = 0.$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution maximale. On la notera $(y, [0, T[)$, avec $T \in \bar{\mathbb{R}}$.

2. Donner un équivalent simple de y en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, T[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$, on ait $y^2(x) < x$.

3. Montrer que pour tout $x \in]0, T[$, on a $y^2(x) < x$.

4. En déduire que $b = +\infty$.

Exercice 2.4.11. On considère l'équation différentielle $x' = t + x^2$. On se donne une donnée initale $x(0) = x_0$.

1. Montrer que le problème admet une unique solution maximale.

2. Supposons par l'absurde que l'intervalle maximal n'est pas majoré, montrer que

$$\forall t > 1, \quad \mathrm{Arctan}(x(t)) - \mathrm{Arctan}(x(1)) \geq t - 1.$$

3. En déduire que I est majoré.

4. Montrer que x est croissante au voisnage de $b = \sup I$.

5. Donner un équivalent de $x(t)$ en b.

Exercice 2.4.12. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = e^{-tx}$ avec la donnée initiale $x(0) = 0$.

1. Montrer que l'unique solution maximale est impaire et strictement croissante.

2. Montrer que l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, \infty)$.

4. En déduire que x admet une limite en $+\infty$. On la note l.

5. Montrer que $l > 1$.

Exercice supplémentaire 2. (Une étude qualitative.)
On considère le problème

$$x(0) = 0, \qquad x'(t) = \frac{1}{1 + t\,x(t)}$$

1. Montrer que c'est un problème de Cauchy qui admet une solution unique

2. Montrer que la solution maximale est impaire et croissante

3. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ (*Penser au théorème des bouts*)

4. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x(t)$.

Exercice supplémentaire 3. (**En autonomie.**)
On consière le problème de Cauchy

$$x'(t) = \sin(tx(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Montrer qu'il admet une unique solution maximale. Montrer que celle-ci est globale et paire.

Exercice supplémentaire 4 (théorème d'unicité d'Osgood)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $(t, x_1, x_2) \in I \times \Omega \times \Omega$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \omega(\|x_1 - x_2\|),$$

où $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfait

$$\forall \sigma > 0, \omega(\sigma) > 0, \quad \forall \alpha > 0, \int_0^\alpha \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)} = +\infty.$$

Montrer que pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, et $x_1, x_2 : I \to \Omega$ solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on a $x_1 = x_2$.