Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 8 - Lemme de Gronwall - Equations différentielles linéaires

Exercice 2.2.8. (**Wronskien et zéros de solutions**) Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

1. On définit *le Wronskien* $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.
   (a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par W. La résoudre.
   (b) Montrer que si g et f sont linéairement indépendanttes alors W ne s'annule jamais.
   (c) Montrer que W est nulle si et seulement si elle s'annule en un point.
   (d) Dans le cas où f et g sont linéairement indépendantes, montrer qu'entre deux zéros de f la fonction g s'annule exactement une fois.
2. On se place maintenant dans le cas $p = 0$. Soit f une solution non identiquement nulle de (E). En étudiant la fonction $J = f'z - z'f$ où z vérifie $z'' = -M^2 z$, montrer que
   (a) Si $q(t) \leq M^2$, alors deux zéros consécutifs de M sont distants d'au moins $\frac{\pi}{M}$.
   (b) Si $q(t) \geq M^2$, alors pour tout intervalle I de longueur $\frac{\pi}{M}$, f admet au moins un zéro dans I.
3. On considère l'équation

$$(B) : y'' + \frac{1}{t}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{t^2})y = 0.$$

   définie pour $t \geq 0$. Soit f une solution non identiquement nulle de (B).
   (a) Se ramener à la forme précédente.
   (b) Selon la valeur de λ, que peut-on dire de la distance entre deux zéros consécutifs de f.

Exercice 2.2.9. (**Lemme de Gronwall**) Soient ψ et $\phi \geq 0$ deux fonctions continues. Soit K une constante positive. On suppose que

$$\forall t > t_0,\ \psi(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t > t_0, \quad \psi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right).$$

Application : Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy linéaire.

Exercice 2.2.10. (**Cauchy-Lipschitz linéaire**) Soient $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une unique solution globale.

Exercice 2.3.13. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système:

$$(S) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

1. Donner une solution évidente de (S).
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   (a) Exprimer le déterminant et la trace de A en fonction de ses valeurs propres.
   (b) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$ et ${}^t(A) < 0$?
3. En déduire que si $\det(A) > 0$ et ${}^t(A) < 0$, alors toute solution de (S) converge vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 2.3.14. (**Suite de l'exercice précédent**) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système:

$$(S) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Rappel : on a montré dans l'Exercice **??** *que, si* $\det(A) > 0$ *et* ${}^t(A) < 0$, *alors toute solution de* (S) *converge vers* $(0, 0)$ *quand* $t \to +\infty$.

1. Que dire quand $\det(A) < 0$? Montrer qu'il existe des solutions qui tendent vers $(0, 0)$ et d'autres dont la norme tend vers l'infini.
2. Si $\det(A) > 0$ et ${}^t(A) = 0$, que peut-on dire des valeurs propres ? Montrer que les solutions sont bornées. Montrer qu'il existe des solutions périodiques. Sont-elles toutes périodiques ?