Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 9 - Exponentielle - Systèmes linéaires

Exercice 2.3.3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 2.3.4 (Exponentielles sans douleur)**.**

1. Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$e^{tA} = a_t A + b_t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. Déterminer a et b lorsque les deux valeurs propres sont distinctes.
3. Si A possède une valeur propre double, λ, montrer que $e^{tA} = e^{t\lambda}\left[I + t(A - \lambda I)\right]$.
4. Généraliser aux matrices de dimension n vérifiant $(A - \lambda I)^n = 0$.

Exercice 2.3.6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer e^{tA}. (Indication : on pourra montrer que l'application $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un morphisme d'anneaux et en déduire que $\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi$.
3. En déduire la solution du système
$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases}$$
avec la condition initiale $x(0) = y(0) = 1$.

4. Déterminer l'ensemble de toutes les solutions de
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -y+e^t \\ y' & = & x. \end{array}\right.$$

Exercice 2.3.7. Calculer e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3.8. Calculer e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3.9.

1. Trouver des matrices A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. Sous quelle condition a-t-on : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$?

Exercice 2.3.10. Résoudre les systèmes différentiels suivants (en la variable t) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y+z+t \\ y' & = & x+e^t \\ z' & = & x+y+z. \end{array}\right.$$

Exercice 2.3.11. Résoudre l'équation différentielle suivante sans calculer d'exponentielle :

$$x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

Exercice 2.3.12. On considère l'équation différentielle :

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0. \qquad (E)$$

1. Transformer cette équation d'ordre 4 en une équation d'ordre 1 : $X' = AX$ avec une matrice carrée A à définir.
2. Trigonaliser la matrice A.
3. Calculer e^{tA}.
4. Résoudre (E).