Applications linéaires

Dans ce TD, L est une application linéaire de l'e.v.n. E muni de la norme $\|.\|_E$ dans l'e.v.n. F muni de la norme $\|.\|_F$.

- Elle est continue/bornée s'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E$,
$$\|L(x)\|_F \leq C\|x\|_F.$$
- Sa norme d'opérateur $\|L\|$ est la plus petite valeur de C possible. Elle est caractérisée par
$$\|L\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

En dimension infinie, cette borne supérieure n'est pas forcément un maximum.

Exercice 1.1.6

Erreur d'énoncé

Sur b). Ecrire

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(\omega)\|_E : \omega \in \Omega\}.$$

- c) : retrouver un exemple de 1.1.1.
- d) : considérer f_n une suite de Cauchy. Montrer que pour tout ω, $f_n(\omega)$ est une suite de Cauchy dans E. En déduire une fonction $f : \Omega \to E$ telle que f_n converge ponctuellement vers f. Vérifier que f appartient à $\mathcal{B}(\Omega, E)$.

Exercices 1.1.7 - 1.1.8

- 1.1.7 : considérer x_n une suite de Cauchy dans A. Montrer qu'elle converge vers un élément x de E. Vérifier que $x \in A$.
- 1.1.8 : si f est la limite uniforme d'une suite f_n, montrer à l'aide de l'inégalité triangulaire que f est continue.

Exercice 1.1.9

- b) : utiliser a) pour montrer que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ par récurrence puis utiliser la convergence absolue.
- c) : Utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.

Exercice 1.1.10

Calcul de norme d'application linéaire - dimension finie

1. Chercher $C > 0$ (le plus petit que vous trouvez) tel que $\forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_F$
2. Chercher (s'il existe) x_0 tel que $\|L(x_0)\| = C\|x_0\|$.

Exercice 1.1.11

- a) : que dire d'un polynôme qui a un nombre infini de racines ?
- b) : trouver P explicite qui vérifie l'égalité
- c) : pour $c = 0$, chercher une suite de polynômes tels que $|P_n(x)| \leq 1$ sur $[0, 1]$ mais tels que $P'(0) = n$.

Montrer qu'une application linéaire n'est pas bornée / continue

Trouver x_n telle que que

- $\|x_n\|_E = 1$,
- $\|L(x_n)\|_F \to +\infty$.

En dimension infinie, la norme n'est pas toujours atteinte.

Calcul de norme d'application linéaire - dimension infinie

1. Chercher $C > 0$ (le plus petit que vous trouvez) tel que $\forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E$
2. Chercher x_0 tel que
$$\|L(x_0)\|_F = C\|x_0\|_E$$
ou une suite x_n telle que
$$\frac{\|L(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \to C$$

Exercice 1.1.12-1.1.15

- 1.1.12 : Pour X, x_0 existe. Pour Y, montrer que T n'est pas continue.
- 1.1.13 : On vérifie que

$$|T(f)| \leq \left(\int_0^{\pi} |\phi(x)| \mathrm{d}x \right) \|f\|_\infty .$$

Pour b), la norme est atteinte. Pour c), il faut utiliser une suite de fonctions uniformément bornée qui va maximiser $T(f)$ ...

Exercice 1.1.12-1.1.15

Pour 1.1.13 c), il faut une suite de fonction f_n

- qui reste bornée par 1,
- qui reste continue,
- le plus proche possible de 1 en valeur absolue,
- du signe de cos.

Pour 1.1.13 c), il faut une suite de fonction f_n

- qui reste bornée par 1,
- qui reste continue,
- le plus proche possible de 1 en valeur absolue,
- du signe de cos.

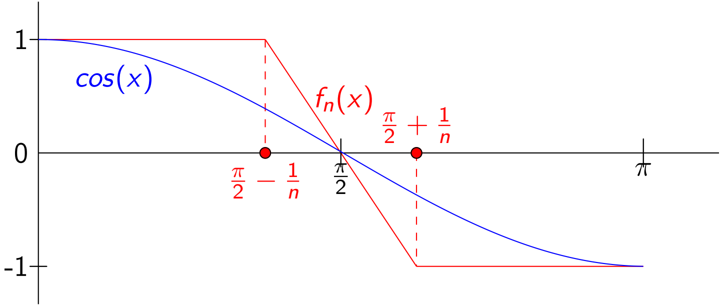

Figure: Une suite de fonctions f_n

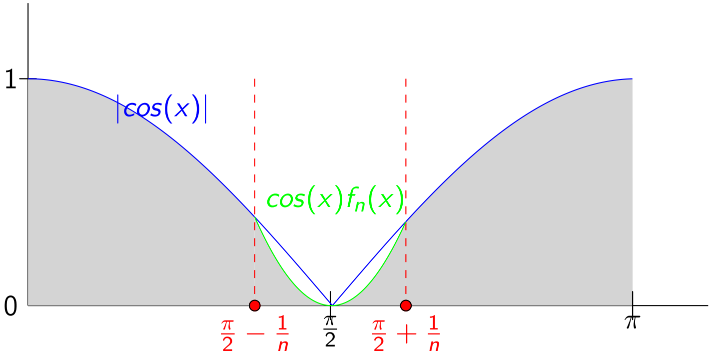

Figure: Le calcul de l'intégrale

Exercice 1.1.12-1.1.15

- 1.1.14 : La norme est atteinte.
- 1.1.15 : Il faut utiliser une suite de fonctions qui "met du poids" autour de 1 tout en restant nulle en 1.

Exercice 1.1.12-1.1.15

- 1.1.14 : La norme est atteinte.
- 1.1.15 : Il faut utiliser une suite de fonctions qui "met du poids" autour de 1 tout en restant nulle en 1.

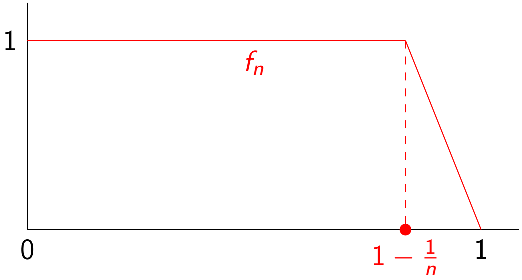

Figure: Une suite de fonctions f_n ...

Exercice 1.1.16

On rappelle le théorème suivant :

Équivalence des normes en dimension finie

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que

$$\forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

Remarque : c'est une caractérisation des espaces vectoriels de dimension finie.