Applications différentiables

Soient E, F est e.v.n. et $U \subset E$ un ouvert de E.
Une fonction $f : U \subset E \mapsto F$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue telle que

$$\forall h \in E, f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

On notera cette application $d_a f$. Dès lors

- $d_a f$ est la différentielle de f au point a. C'est une application linéaire de E dans F.
- $d_a f(h)$ est la différentielle de f au point a, évaluée au point h.

Exemples

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ et f est différentiable en $x \in U$, alors $d_x f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et est donc représenté par une matrice à m lignes et n colonnes. On obtient

1. $f(x+h) = f(x) + Jac_x(f).h + o(\|h\|)$,
2. Si $m = 1$, $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla_a f, h \rangle + o(\|h\|)$,
3. Si $n = 1$, $f(x+h) = f'(x)h + o(\|h\|)$.

Ici, les différentielles sont respectivement définies par

1. $d_x f(x) = Jac_x.h$,
2. $d_x f(x) =< \nabla_x f, h >$,
3. $d_x f(x) = f'(x)h$.

Règle de composition

Soient E, F, G des espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F.

Différentielle de la composée

On suppose $f : U \to F$ différentiable en x et $f(U) \subset V$. On suppose aussi $g : V \to G$ différentiable en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x et

$$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)}g) \circ (d_x f).$$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m, G = \mathbb{R}^p$ on obtient la règle de la chaine

$$Jac_x(g \circ f) = Jac_{f(x)}g \times Jac_x f.$$

C'est à dire coefficient par coefficient : $\forall i \in \{1, ..., p\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)).\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$