Fonctions de Littlewood-Paley-Stein pour les opérateurs de Schrödinger et le laplacien de Hodge-de Rham sur des variétés non compactes

Thomas Cometx, sous la direction de E.M. Ouhabaz

26 novembre 2020

Mots-clés

- Analyse harmonique réelle sur les variétés non-compactes,
- Opérateurs de Laplace-Beltrami, de Schrödinger et Hodge-de Rham sur les 1-formes,
- Fonctionnelles liées aux solutions d'équations d'évolution associées, comme l'équation de la chaleur,
- Problèmes de bornétude sur L^p pour $p \neq 2$.

La transformée de Riesz dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f . f \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^{1/2} f . \Delta^{1/2} f \, dx = \|\Delta^{1/2} f\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Chaque coordonnée de $\nabla \Delta^{-1/2} f$ est un *opérateur d'intégrale singulière* :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta^{-1/2} f(x) = c_n \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} f(y) dy.$$

Théorème

Quelque soit $p \in (1, +\infty)$ il existe $C_p > 0$ tel que

$$\forall f \in C_c^\infty, \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{1/2} f|^p dx.$$

Cadre d'étude

La question de Strichartz (1983)

Soit (M, g) une variété riemannienne, pour quelles valeurs de $p \in (1, +\infty)$ la **Transformée de Riesz** $\mathcal{R} = \nabla\Delta^{-1/2}$ est elle bornée sur $L^p(M)$?

$$\int_M |\nabla f|^p dx \leq C_p \int_M |\Delta^{1/2} f|^p dx.$$

- Les p tels que $\mathcal{R}$ est bornée sur L^p forment un intervalle contenant 2,
- Toujours bornée en courbure de Ricci positive,
- Pour $M = \mathbb{R}^2 \# \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}$ est bornée exactement pour $p \in (1, 2]$ [Coulhon-Duong].

Cadre d'étude

Dans tout l'exposé :

- ρ et μ sont respectivement la distance et la mesure induites sur M par la métrique g,
- d est la différentielle extérieure,
- ∇ est la connexion de Levi-Civita,
- Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami,
- $e^{-t\Delta}f(x)$ est la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale f :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = f(x).$$

Cadre d'étude

- $p_t(x, y)$ est le noyau de la chaleur sur les fonctions :

$$e^{-t\Delta} f(x) = \int_M p_t(x, y) f(y) dy.$$

Théorème (Coulhon-Duong)

$\mathcal{R}$ est bornée sur L^p pour $p \in (1, 2]$ en supposant

- estimation gaussienne du noyau de la chaleur

$$p_t(x, y) \leq C \frac{exp(-\frac{c\rho(x,y)^2}{t})}{\mu(B(x, t^{1/2}))}, \tag{G}$$

- doublement du volume

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)). \tag{D}$$

Exemples sans (G) [Chen-Coulhon-Feneuil-Russ].

Laplacien de Hodge-de Rham

- $< .,. >_x$ est le produit scalaire sur l'espace cotangent $T_x^* M$ et $|.|_x$ la norme associée,
- La norme $L^p(\Lambda^1 T^* M)$ est donnée par

$$\|\omega\|_p = \left(\int_M |\omega(x)|_x^p dx \right)^{1/p},$$

- d^* (resp. ∇^*) est l'adjoint de d (resp. ∇) pour le produit scalaire $L^2(\Lambda^1 T^* M)$ sur les formes.

Laplacien de Hodge-de Rham (sur les 1-formes)

Le laplacien de Hodge-de Rham sur les 1-formes est défini par

$$\vec{\Delta}\omega = (dd^* + d^* d)\omega.$$

$\vec{\Delta}$ est positif et génère un semi-groupe $e^{-t\vec{\Delta}}$ sur $L^2(\Lambda^1 T^* M)$.

Les fonctions de LPS - Historique

Stein introduit les *fonctions de Littlewood-Paley-Stein* pour étudier la bornétude de la transformée de Riesz.

Fonctions de LPS verticales

$$H_\Delta(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\Delta} f(x)|_x^2 dt \right)^{1/2},$$

$$G_\Delta(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\Delta^{1/2}} f(x)|_x^2 t dt \right)^{1/2}.$$

Fonctions de LPS horizontales

$$g_\Delta(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\Delta^{1/2} e^{-t\Delta^{1/2}} f(x)|^2 t dt \right)^{1/2}.$$

Les fonctions de LPS - Historique

Les fonctionnelles horizontales sont bornées sur L^p pour $p \in (1, +\infty)$ car Δ admet un calcul fonctionnel H^∞ sur L^p.

Fonctions H^∞, H_0^∞

Soit $\Sigma(\mu) = \{z \neq 0, |arg(z)| < \mu\}$ pour $\mu > 0$.

- $F \in H^\infty(\Sigma(\mu))$ si F est holomorphe et bornée sur $\Sigma(\mu)$,
- $F \in H_0^\infty(\Sigma(\mu))$ si $F \in H^\infty(\Sigma(\mu))$ et

$$|f(z)| \leq C \frac{|z|^\gamma}{1 + |z|^{2\gamma}}.$$

Soit $\omega_p = \arcsin \left| \frac{2}{p} - 1 \right| + \beta$.

$$\text{Si } \phi \in H_0^\infty(\Sigma(\omega_p)), \quad \|f\|_p \simeq \left\| \left(\int_0^\infty |\phi(t\Delta)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Applications

Soit $\vec{g}$ définie sur les 1-formes par

$$\vec{g}(\omega)(x) = \left(\int_0^\infty |\vec{\Delta}^{1/2} e^{-t\vec{\Delta}^{1/2}} \omega|_x^2 t dt \right)^{1/2}.$$

Théorème (Coulhon-Duong)

Si G_Δ est bornée sur $L^p(M)$ et $\vec{g}$ est bornée sur $L^{p'}(\Lambda^1 T^* M)$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), alors $\mathcal{R}$ est bornée sur L^p.

Régularité

Si $\mathcal{R}$ ou H_Δ est bornée sur $L^p(M)$ alors,

$$\|\sqrt{t} \nabla e^{-t\Delta} f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Analogie Schrödinger / Hodge-de Rham

Opérateur de Schrödinger

Soit V une fonction localement intégrable, on définit un opérateur de Schrödinger $L = \Delta + V$ par

$$Lf(x) = \Delta f(x) + V(x)f(x).$$

Transformées de Riesz associées : $\nabla L^{-1/2}, |V|^{1/2} L^{-1/2}$.

Formule de Böchner

$$\vec{\Delta} = \nabla^* \nabla + R_x = \tilde{\Delta} + R_x, \tag{B}$$

où $R_x = R_x^+ - R_x^-$ est le tenseur de Ricci. La formule de Böchner permet de voir $\vec{\Delta}$ comme un opérateur de Schrödinger à "potentiel matriciel".

Transformées de Riesz associées : $d\vec{\Delta}^{-1/2}, d^*\vec{\Delta}^{-1/2}, \nabla\vec{\Delta}^{-1/2}$.

Sommaire

Sommaire

Objectifs

- Étudier les fonctionnelles de LPS pour $L = \Delta + V$ et $\vec{\Delta}$,
- En déduire des résultats sur la transformée de Riesz,
- Dans le cadre le plus général possible en évitant de supposer (D) et (G).

Doublement du volume

$$\forall x \in M, \forall r > 0, \quad \mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r)). \tag{D}$$

Estimation gaussienne du noyau de la chaleur

$$\forall x, y \in M, \forall t > 0, \quad p_t(x,y) \leq C\frac{exp(-\frac{c\rho(x,y)^2}{t})}{\mu(B(x,t^{1/2}))}. \tag{G}$$

Fonctions de Littlewood-Paley-Stein pour Δ

Si $V = 0$, L est l'opérateur de Laplace-Beltrami.

$$\begin{aligned} H_\Delta(f)(x) &= \left(\int_0^\infty |de^{-t\Delta} f(x)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\simeq \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\Delta} f(x)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Continuité en norme L^p ?

- Cas $p \leq 2$: continu sur pour $p \in (1, 2]$ en toute généralité [Stein],
- Cas $p > 2$: vrai si $|\nabla e^{-t\Delta} f| \leq Ce^{-t\delta\Delta} |\nabla f|$, faux sur $\mathbb{R}^2 \# \mathbb{R}^2$,
- Sous (D) et (G) : type faible $(1, 1)$ [Coulhon-Duong-Li]

$$\mu(\{x, |H_\Delta(f)(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1.$$

Fonctions de LPS pour $\Delta + V$

Définition

$$H_L(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-tL} f(x)|^2 + |V(x)||e^{-tL} f(x)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Continuité en norme L^p ? Cas $V \geq 0$.

- Vrai sans condition pour $p \in (1, 2]$ [Ouhabaz],
- Supposons l'inégalité de Sobolev

$$|f(x) - f(y)| \leq C\rho(x, y)^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla f\|_p$$

  et l'existence de ϕ bornée et strictement positive telle que $e^{-tL}\phi = \phi$. Si H_L est bornée sur L^p pour $p > N$ alors $V = 0$. [Chen-Magniez-Ouhabaz].

Fonctions de LPS pour $\Delta + V$

Et si $V = V^+ - V^-$ admet une partie négative non triviale ? Considérons des potentiels tels $L = \Delta + V$ est positif sur $L^2(M)$.

Potentiel sous-critique

La partie négative V^- est sous-critique par rapport à $\Delta + V^+$ s'il existe $\alpha \in [0, 1)$ tel que,

$$\forall f \in D(L), \int_M V^- f^2 dx \leq \alpha \int_M \left(V^+ f^2 + |\nabla f|^2 \right) dx.$$

Sous cette condition $-L$ est générateur d'un semi-groupe sur $L^2(M)$ e^{-tL}. Il est de contraction sur L^p pour $p \in (p_1, p_1')$, où $p_1 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha}}$.

Fonctions de LPS pour $\Delta + V$

Théorème (C. 2019)

Soit $L = \Delta + V$ un opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète. On suppose que la partie négative V^- est sous critique par rapport à $\Delta + V^+$, avec $\alpha \in [0, 1)$. Alors H_L est continue en norme L^p pour tout $p \in (p_1 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha}}, 2]$.

- Le théorème est vrai en toute généralité. Pas besoin de (D) ni de (G).
- La preuve se base sur la *Méthode de Stein*,

$$\Delta u^p = -p(p-1)|\nabla u|^2 u^{p-2} + p u^{p-1} \Delta u.$$

Idée de preuve

Soit $p \in (p_1, 2]$. Soit $f_t = e^{-tL} f$ avec $f \geq 0$. On introduit des constantes $\xi > 0$, et $0 < c < p < k$.

1. Calculer $Q(t,f,x) = \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \xi\Delta - cV^+ + kV^-\right) f_t^p$,
2. Intégrer par rapport à t donne

$$H_L(f)(x)^2 \leq C_{\xi,c,k,p} \int_0^\infty f_t^{2-p} \left[Q(t,f,x) + p(\xi-1) f_t^{p-1} \Delta f_t\right] dt$$
$$\leq C(\sup_t f_t^{2-p}) \int_0^\infty \left[Q(t,f,x) + p(\xi-1) f_t^{p-1} \Delta f_t\right] dt,$$

3. Utiliser l'inégalité de Hölder avec $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$ donne

$$\|H_L(f)\|_p^p \leq C \|\sup_t f_t\|_p^{p(1-p/2)}$$
$$\times \left[\int_M \int_0^\infty Q(t,f,x) + p(\xi-1) f_t^{p-1} \Delta f_t dt dx\right]^{p/2},$$

Idée de preuve

4. f_t vérifie une inégalité maximale L^p $\|\sup_t f_t\|_p \leq C\|f\|_p$,

$$\begin{aligned}\|H_L(f)\|_p^p &\leq C\|f\|_p^{p(1-p/2)}\left[\int_M \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial t} f_t^p dtdx + \int_0^\infty I(t)dt\right]^{p/2}\\ &\leq C\|f\|_p^{p(1-p/2)}\left[\|f\|_p^p + \int_0^\infty I(t)dt\right]^{p/2},\end{aligned}$$

$$\text{avec } I(t) = \int_M f_t^{p-1}\left(-cV^+ + kV^- + p(\xi-1)\Delta\right) f_t dx.$$

5. Optimiser ξ, c et k pour obtenir $I(t) \leq 0$ pour tout t. C'est possible pour $p \in (p_1, p_1')$ en utilisant l'hypothèse de sous-criticité.

Exemples

Le théorème s'applique dans des cas explicites !

Variétés de Cartan-Hadamard

Une variété de Cartan-Hadamard est une variété riemannienne complète, simplement connexe et de courbure sectionnelle négative ou nulle.
Exemples : les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^N$ et euclidiens $\mathbb{R}^N$.

Soit M une variété de Cartan-Hadamard de dimension $N > 2$, $x_0 \in M$ et $\kappa > 0$,

$$\int_M |f(x)|^2 \frac{\kappa dx}{\rho(x, x_0)^2} \leq \kappa \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \int_M |\nabla f|^2 dx.$$

Soit $L = \Delta + V$ avec $V^- = \frac{\kappa}{\rho(x,x_0)^2}$ et κ assez petit. V^- est sous critique et on peut appliquer le théorème précédent.

Fonctions de LPS pour $\vec{\Delta}$

Pour $\vec{\Delta}$, on définit une fonctionnelle de LPS par analogie avec $L = \Delta + V$.

Définition

$$H_{\vec{\Delta}}(\omega)(x) := \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\vec{\Delta}}\omega|_x^2 + < (R^+ + R^-)e^{-t\vec{\Delta}}\omega, e^{-t\vec{\Delta}}\omega >_x dt \right)^{1/2}.$$

Courbure de Ricci sous-critique

La partie négative de la courbure de Ricci R^- est sous critique par rapport à $\nabla^*\nabla + R^+$ s'il existe $\alpha \in [0, 1)$ tel que

$$\forall \omega \in D(\vec{\Delta}), \int_M < R^-\omega, \omega >_x dx \leq \alpha \int_M \left(|\nabla\omega|_x^2 + < R^+\omega, \omega >_x \right) dx.$$

Fonctions de LPS pour $\vec{\Delta}$

Théorème (C., 2019)

On suppose que la partie négative R^- de la courbure de Ricci est sous critique par rapport à $\nabla^*\nabla + R^+$, avec $\alpha \in [0,1)$. Soit $p \in (p_1 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha}}, 2]$. Supposons que $e^{-t\vec{\Delta}}$ vérifie l'inégalité maximale L^p,

$$\left\| \sup_{t>0} |e^{-t\vec{\Delta}}\omega|_x \right\|_p \leq C\|\omega\|_p$$

pour un certain $C > 0$. Alors $H_{\vec{\Delta}}$ est continue en norme L^p pour tout $q \in [p, 2]$.

- L'inégalité maximale est une hypothèse à part entière,
- Soit $\mathcal{V}(x) = \sup_{v \in T_x^*M, |v|_x=1} < R^- v, v >_x$. Si $\mathcal{V}$ est sous-critique par rapport à Δ alors les hypothèses sont vérifiées, notamment car $|e^{-t\vec{\Delta}}\omega|_x \leq e^{-t(\Delta-\mathcal{V})}|\omega|_x$.

Application à la transformée de Riesz

On aurait pu définir

$$H^{d^*}_{\vec{\Delta}}(\omega)(x) = \left(\int_0^\infty |d^* e^{-t\vec{\Delta}}\omega(x)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

On a l'inégalité ponctuelle $H^{d^*}_{\vec{\Delta}}(\omega)(x) \leq C H_{\vec{\Delta}}(\omega)(x)$.

Proposition

Si $H^{d^*}_{\vec{\Delta}}$ est bornée sur $L^p(\Lambda^1 T^* M)$, alors la transformée de Riesz est bornée sur $L^{p'}(M)$.

Corollaire

Sous les hypothèses du théorème précédent, la transformée de Riesz est bornée sur $L^{p'}$.

Commentaires

On obtient un résultat positif sur la bornétude de la transformée de Riesz sur $L^{p'}$:

- pour $p' \geq 2$,
- sans doublement de volume (D),
- sans estimation gaussienne du noyau de la chaleur (G).

Question : Peut-on construire explicitement une variété non doublante vérifiant les hypothèses précédentes ?

Sommaire

Objectifs

Dans cette partie, $L = \Delta + V$ est un opérateur de Schrödinger avec $0 \leq V \in L^1_{loc}$.

- Liens LPS / Riesz,
- Faire intervenir la R-bornétude de la famille $\{\sqrt{t}\nabla e^{-tL}, t \geq 0\}$ car

$$\nabla L^{-1/2} = \int_0^\infty \left[\sqrt{t}\nabla e^{-tL}\right] \frac{dt}{t},$$

- Remplacer e^{-tL} par $F(tL)$ dans l'expression des fonctions de LPS (pour F à determiner).

Riesz $\Rightarrow$ LPS

Extension vectorielle

Si $\mathcal{R}$ est bornée sur $L^p(M)$, alors son extension est bornée sur $L^p(M, L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}))$.

Soit $f \in L^p(M)$. On a

$$\left\| \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\Delta} f(x)|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| \left(\int_0^\infty |\Delta^{1/2} e^{-t\Delta} f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_p$$
$$\leq C \|f\|_p.$$

Question : Peut-on mieux faire ?

R-bornétude

Variable de Rademacher

Une v.a. discrète suit une loi de Rademacher si

$$\mathbb{P}(\tau = 1) = \mathbb{P}(\tau = -1) = 1/2.$$

Définition

Une famille d'opérateurs $(T_t)_{t \in I}$ sur L^p est dite R-bornée s'il existe C tel que pour tout n, $t_1, \dots, t_n \in I$ et $f_1, \dots f_n \in L^p$,

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \tau_i T_{t_i} f_i \right\|_p \leq C \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \tau_i f_i \right\|_p ,$$

où les τ_i sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes.

R-bornétude

Inégalité de Khintchine-Kahane

Soit $p \in (0, +\infty)$. Il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$,

$$A \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{n} \tau_i x_i \right|^p \right)^{1/p} \leq B \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème (Weis)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $(T_t)_{t \in I}$ est R-bornée sur $L^p(M)$, alors il existe $C > 0$ tel

$$\forall f \in L^p(M, L^2(I)), \left\| \left(\int_I |T_t f(t,.)|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| \left(\int_I |f(t,.)|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Lien LPS - R-bornétude

Théorème (C.-Ouhabaz 2020)

Soit $L = \Delta + V$ un opérateur de Schrödinger avec $0 \leq V \in L^1_{loc}$ et $\Gamma = \nabla$ ou $\Gamma = V^{1/2}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe $C > 0$ tel que pour toute fonction $f \in L^p$,
$$\left\| \left(\int_0^\infty |\Gamma e^{-tL} f|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \|f\|_p,$$
2. La famille d'opérateurs $\{\sqrt{t}\Gamma e^{-tL}, t \geq 0\}$ est R-bornée sur L^p,

- Les familles $\{\sqrt{t}\nabla e^{-tL}, t \geq 0\}$ et $\{\sqrt{t}V^{1/2} e^{-tL}, t \geq 0\}$ sont toujours R-bornées sur L^p pour $p \in (1, 2]$. C'est mieux que la bornétude uniforme.
- (1) $\Rightarrow$ (2) est une amélioration de la preuve de la bornétude uniforme.

Lien LPS - Riesz

Littérature

$(a)-$ la transformée de Riesz $\Gamma L^{-1/2}$ est bornée sur L^p,

$$\Downarrow$$

$(c)-$ la fonctionnelle de Littlewood-Paley-Stein H_L^Γ est bornée sur L^p,

$$\Downarrow$$

$(d)-$ $\{\sqrt{t}\,\Gamma\, e^{-tL},\ t \geq 0\}$ est uniformément bornée sur L^p.

Lien LPS - Riesz

Contributions

$(o)-$ la fonctionnelle de Littlewood-Paley-Stein $H_{\vec{\Delta}}^{d^*}$ est bornée sur $L^{p'}$,

$$\Downarrow$$

$(a)-$ la transformée de Riesz $\Gamma L^{-1/2}$ est bornée sur L^p,

$$\Downarrow$$

$(b)-$ $\{\sqrt{t}\,\Gamma\, e^{-tL},\ t \geq 0\}$ est R-bornée sur L^p,

$$\Updownarrow$$

$(c)-$ la fonctionnelle de Littlewood-Paley-Stein H_L^Γ est bornée sur L^p,

$$\Downarrow$$

$(d)-$ $\{\sqrt{t}\,\Gamma\, e^{-tL},\ t \geq 0\}$ est uniformément bornée sur L^p.

Remarque : Possibilité de remonter $(c) \Rightarrow (a)$, $(d) \Rightarrow (a)$.

Fonctions de LPS généralisées

Soit L un opérateur de Schrödinger avec potentiel $0 \leq V \in L^1_{loc}$. On généralise les fonctionnelles de LPS en introduisant

$$H_F^\Gamma(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\Gamma F(tL) f(x)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- Γ est ∇ ou la multiplication par $V^{1/2}$,
- $F \in H^\infty(\Sigma(\omega_p))$.

Objectif : Se ramener à des estimations carrées de calcul fonctionnel par le théorème de Weis.

Fonctions de LPS généralisées

Théorème (C.-Ouhabaz, 2020)

Soit $L = \Delta + V$ un opérateur de Schrödinger avec $V \geq 0$. Soit $\Gamma = \nabla$ ou $\Gamma = V^{1/2}$. Soit $F \in H^\infty(\Sigma(\omega_p))$. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ et $\delta > 1/2$ tels que $|F(z)| \leq \frac{C}{|z|^\delta}$ lorsque $|z| \to +\infty$ et $|F'(z)| \leq C|z|^{\epsilon-1}$ lorsque $z \to 0$.

Si $\{\sqrt{t}\Gamma e^{-tL}, t \geq 0\}$ est R-bornée sur $L^p(M)$, il existe $C > 0$ pour tout $f \in L^p(M)$,

$$\left\| \left(\int_0^\infty |\Gamma F(tL) f|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| f \right\|_p .$$

Remarque : Toujours vrai si $p \in (1, 2]$.

Idée de preuve

1. Intégrer par parties donne

$$\left(\int_0^\infty |\Gamma F(tL)f|^2 dt\right)^{1/2} \le \sqrt{2}\left(\int_0^\infty |\Gamma G(tL)f|^2 dt\right)^{1/2},$$

avec $G(z) = zF'(z)$. Ici on gagne une décroissance en zéro !

2. Intercaler $(I+tL)^{\delta'}(I+tL)^{-\delta'}$ avec $\delta > \delta' > 1/2$,

$$\left(\int_0^\infty |\Gamma G(tL)f|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty |\sqrt{t}\Gamma(1+tL)^{-\delta'}(1+tL)^{\delta'} G(tL)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Idée de preuve

3. La R-bornétude de $\{\sqrt{t}\Gamma(I+tL)^{-\delta'}\}$ (équivalente à celle de $\sqrt{t}\Gamma e^{-tL}$) donne

$$\left\|\left(\int_0^\infty |\Gamma F(tL)f|^2 dt\right)^{1/2}\right\|_p \leq C\left\|\left(\int_0^\infty |G(tL)(I+tL)^{\delta'} f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}\right\|_p$$
$$= C\left\|\left(\int_0^\infty |\phi(tL)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}\right\|_p$$

avec $\phi(z) = zF'(z)(1+z)^{\delta'}$.

4. Comme $\delta' < \delta$, $\phi \in H_0^\infty(\Sigma(\omega_p))$. Le terme de droite est majoré par $\|f\|_p$.

Fonctions de LPS généralisées

En utilisant la R-bornétude du calcul fonctionnel et l'inégalité de Khintchine-Kahane on a le résultat plus général.

Théorème (C.-Ouhabaz, 2020)

Soient $m_1, ..., m_n \in H^\infty(\Sigma(\omega_p))$.

Sous les hypothèses du theorème précédent, il existe $C > 0$ (indépendant des m_k) tel que pour toutes fonctions $f_1, ..., f_n \in L^p(M)$,

$$\left\| \left(\int_0^\infty \sum_{k=1}^n |\Gamma m_k(L) F(tL) f_k|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \sup_k \|m_k\|_\infty \left\| \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Question : Peut-on remplacer $m_k(L)F(tL)$ par $F_k(tL)$?

Commentaires

- Si H_F^{∇} et $H_F^{V^{1/2}}$ sont bornées sur L^p alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in L^{p'}(M), C\|f\|_{p'} \leq \|H_F^{V^{1/2}}(f)\|_{p'} + \|H_F^{\nabla}(f)\|_{p'},$$

- Résultat analogue pour les multiplicateurs spectraux,
- Fonctions de LPS locales et à l'infini. Lien avec $\Gamma(L+I)^{-1/2}$ et $\Gamma L^{-1/2}e^{-L}$.

Opérateurs uniformément elliptiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $k, l \in \{1, ..., N\}$, soient $a_{k,l}$ des fonctions réelles mesurables telles que $a_{k,l} = a_{l,k}$. On suppose que celles-ci vérifient la condition d'ellipticité

$$\sum_{k,l=1}^{N} a_{k,l}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour $\nu > 0$ indépendant de x. Soit $A(x)$ la matrice des fonctions $a_{k,l}$, on définit l'opérateur (avec conditions de Dirichlet)

$$L = -div(A(x)\nabla .).$$

Résultats

Theorème (C.-Ouhabaz 2020)

Soit $L = -div(A(x)\nabla.)$ défini comme précédement. Pour $q \in [2, +\infty)$,

1. $$C\|f\|_q \leq \|e^{-L}f\|_q + \left\| \left(\int_0^1 |\nabla e^{-tL} f|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_q \quad (1)$$

   et

   $$C\|f\|_q \leq \left\| \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-tL} f|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_q . \quad (2)$$

2. si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors on peut prendre $q \in (1, +\infty)$.

- L'inégalité (2) est obtenue pour Ω à bord lisse dans [Ivanovici-Planchon],
- Ici aucune hypothèse de régularité sur A ou sur Ω.

Sommaire

Fonctionelles coniques

Soit M une variété satisfaisant le doublement (D). Il existe $N > 0$ tel que

$$\mu(B(x, \lambda r)) \leq C\lambda^N \mu(B(x, r)).$$

Soit $L = \Delta + V$ est un opérateur de Schrödinger avec $V \in L^1_{loc}$. On définit la fonction carrée conique (ou non-tangentielle)

$$\mathcal{G}_L(f)(x) = \left(\int_0^\infty \int_{B(x,t^{1/2})} |\nabla e^{-tL} f(y)|^2 + |V||e^{-tL} f(y)|^2 \frac{dydt}{\mu(B(y, t^{1/2}))} \right)^{1/2}.$$

Fonctionelles coniques : littérature

Étudiées par [Auscher-Hofmann-Martell] sur $\mathbb{R}^n$ pour les opérateurs sous forme divergence $L = -div(A\nabla .)$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Objectifs

- Mêmes résultats de bornétude que dans $\mathbb{R}^n$?
- Comparaison Fonctions LPS - Fonctions coniques.
- Peut-on prendre une autre fonction que l'exponentielle ?

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on obtient la comparaison suivante.

Théorème

- pour $p \leq 2, \|H_L(f)\|_p \leq C\|\mathcal{G}_L(f)\|_p$,
- pour $p \geq 2, \|\mathcal{G}_L(f)\|_p \leq C\|H_L(f)\|_p$.

Résultats pour $p \geq 2$

Théorème (C. 2020)

Si V^- est sous critique par rapport à $\Delta + V^+$, alors $\mathcal{G}_L$ est bornée sur L^p pour tout $p \in [2, +\infty)$.

- Basé sur les estimations de Davies-Gaffney

$$\|\sqrt{t}\Gamma e^{-tL} f \chi_E\|_{L^2(F)} \leq Ce^{-c\rho^2(E,F)/t}\|f\|_{L^2(E)},$$

- Cela donne des exemples sur lesquels $\mathcal{G}_L$ est bornée et pas H_L,
- $\mathcal{G}_L$ peut être bornés sur L^p alors que e^{-tL} n'agit même pas continuement sur L^p.

Fonctions coniques généralisées

$$\mathcal{G}_L^F(f)(x) = \left(\int_0^\infty \int_{B(x,t^{1/2})} |\nabla F(tL)f(y)|^2 + |V||F(tL)f(y)|^2 \frac{dydt}{\mu(B(y,t^{1/2}))} \right)^{1/2}.$$

Théorème (C. 2020)

Soit F une fonction holomorphe sur $\Sigma(\omega_p) = \{z \neq 0, |arg(z)| < \omega_p\}$ telle que pour tout $z \in \Sigma(\omega_p)$, $|F(z)| \leq C\frac{|z|^\tau}{1+|z|^{\tau+\delta}}$ pour un certain $\delta > 1/2$ et $\tau > (N-2)/4$. Alors $\mathcal{G}_L^F$ est bornée sur $L^p(M)$ pour tout $p \in [2, +\infty)$.

Cas $p \leq 2$

Théorème (C. 2020)

Soit $p \in [1,2]$ et M une variété doublante. Supposons que les familles $\sqrt{t}\nabla e^{-tL}$ et $\sqrt{t}|V|^{1/2}e^{-tL}$ vérifient, pour toute boule $B(x_0, r_B)$ et tout $j \in \mathbb{N}$, des estimations hors-diagonale $L^p - L^2$

$$\left(\int_{C_j(B)} |\sqrt{t}\Gamma e^{-tL} f\chi_B|^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{C}{\mu(B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \sup\left(\frac{2^j r_B}{\sqrt{t}}, \frac{\sqrt{t}}{2^j r_B}\right)^{\beta} e^{-c4^j r_B^2/t} \left(\int_B |f|^p dx\right)^{1/p},$$

où $C_j(B) = \{x, 2^j r_B \leq \rho(x,x_0) \leq 2^{j+1} r_B\}$. Alors $\mathcal{G}_L$ est bornée sur L^r pour tout $r \in (p, 2]$.

Commentaires

- Sous l'estimation gaussienne (G), si V^- est sous-critique par rapport à $\Delta + V^+$, on obtient bornétude de $\mathcal{G}_L$ sur L^p pour $p \in (p_0', +\infty]$, où $p_0 = \frac{N}{N-2}\frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}}$.
- Cela fonctionne aussi pour des fonctionnelles coniques associées à $e^{-t\vec{\Delta}}$:

$$\mathcal{G}_{\vec{\Delta}}(\omega)(x) = \left(\int_0^\infty \int_{B(x,t^{1/2})} |d^* e^{-t\vec{\Delta}}\omega(y)|_y^2 \frac{dydt}{\mu(B(y,t^{1/2}))}\right)^{1/2}.$$

- Inégalités inverses sur le dual.

Application à la transformée de Riesz

Théorème (C. 2020)

Soit $p \in (1,2]$. Soit M une variété vérifiant le doublement (D). Si $\{\sqrt{t} d^* e^{-t\vec{\Delta}}, t \geq 0\}$ satisfait des estimations hors diagonale $L^p - L^2$, alors la transformée de Riesz est bornée sur $L^{p'}(M)$.

Théorème (Magniez)

Soit M une variété vérifiant le doublement (D) et l'estimation gaussienne (G). Si R^- est sous-critique par rapport à $\Delta + R^+$, alors $\mathcal{R}$ est bornée sur L^p pour $p \in (1, p_0)$ avec $p_0 = \frac{N}{N-2} \frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}}$.

Liste des publications

1. *Littlewood-Paley-Stein functions for Schrödinger and Hodge-de Rham operators.* Accepté dans *Journal of Geometric Analysis*.
2. *Littlewood-Paley-Stein functionals: an R-boundedness approach.* Avec El Maati Ouhabaz. Soumis pour publication
3. *Conic square functions on manifolds.* En préparation.

Merci pour votre attention !