Introduction à l'analyse numérique
Année : 2019-2020
Formation : L2 Mathématiques

TP3 : Recherche des zéros de fonctions

Soit f une fonction numérique dont on recherche un zéro ζ. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations de ζ obtenue à partir de termes initiaux en utilisant l'une des méthodes suivantes : méthode de dichotomie, de la sécante ou de Newton.

Exercice 1.

1. *Ecrivez une fonction* `function zero = dichoto(f, a, b, nbetap)` *qui renvoie la suite des* $nbetap + 1$ *premières approximations du zéro de* f *localisé entre* a *et* b *calculé par une méthode de dichotomie.*
2. *Ecrivez une fonction* `function zero = secante(f, x0, x1, nbetap)` *qui renvoie la suite des* $nbetap+1$ *premières approximations du zéro de* f *calculé à partir de* x_0 *et* x_1 *par la méthode de la sécante.*
3. *Ecrivez une fonction* `function zero = newton(f, ff, x0, nbetap)` *qui renvoie la suite des* $nbetap+1$ *premières approximations du zéro de* f *calculé à l'aide de la dérivée* ff *de* f *à partir de* x_0 *par la méthode de Newton.*

Exercice 2 (Ordre de convergence)**.** *On définit les fonctions*

$$f_1(x) = 3\cos(x) - 2\ln(x+1) - 1,$$

$$f_2 = 2x - 1, \quad f_3(x) = (2x-1)^3, f_4(x) = (2x-1)^5$$

1. *Après avoir calculé les dérivées à la main, testez les fonctions écrites lors de l'exercice précédent sur les fonctions* f_i, $1 \leq i \leq 4$ *ainsi définies.*
2. *Comparez sur un même graphique (n en fonction de k) le nombre n d'itérations nécessaires à chaque méthode pour obtenir le zéro des fonctions suivantes entre* $a = 0$ *et* $b = 1$ *avec une précision de* 10^{-k} *pour k entre 1 et 5.*
3. *Pour les trois dernières fonctions, représentez graphiquement les premiers termes de la suite* $\left(\frac{\ln(|\zeta - x_{n+1}|)}{\ln(|\zeta - x_n|)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* ζ *représente la zéro de la fonction.*

Exercice 3 (Le modèle S.I.R.)**.** *Un modèle simple de biologie, le modèle SIR, permet de simuler l'évolution d'une population affectée par une épidémie. Afin de calibrer un dispositif de santé publique, on souhaite connaître au début de l'épidémie combien de personnes seront touchées et combien resteront saines. Les équations du modèle conduisent à l'égalité :*

$$S_\infty = S_0 \exp\left(-\frac{N - S_\infty}{\rho}\right)$$

où N *est le nombre d'individus total,* S_0 *est le nombre d'individus initialement sains,* ρ *est un taux de guérison relatif (inférieur à* S_0*) et* S_∞ *est notre inconnue : le nombre d'individu restés sains en fin d'épidémie.*

1. *Montrez que l'équation (1) admet une seule solution entre 0 et N.*

2. *Résolvez l'équation pour $N = 51$, $S_0 = 50$ et différentes valeurs admissibles de ρ. Tracez le graphique de S_∞ en fonction du rapport $\frac{S_0}{\rho}$.*

Exercice 4 (Fractale de Newton)**.** *La méthodes de Newton s'applique aussi aux fonctions vectorielles, et donc en particulier, aux fonctions à variables complexes. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1$. Cette équation admet trois racines dans le plan complexe : 1, j et j^2 avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$. On souhaite étudier vers quelle racine converge la méthode de Newton appliquée à cette équation, en fonction de la valeur choisie pour initialiser la suite des itérations de Newton. Plus précisément, on souhaite colorier le domaine du plan complexe $D = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{C}$ en fonction de la racine de f vers laquelle la méthode de Newton converge. Vous pouvez consulter la page web `https://fr.wikipedia.org/wiki/FractaledeNewton` pour avoir une idée du phénomène que l'on souhaite observer.*

Pour cela, on définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = (Re((x + iy)^3 - 1), Im((x + iy)^3 - 1)) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$, qui s'annule en chaque (x, y) tel que $(x + iy)^3 = 1$.

1. *Calculer à la main $F(x, y)$ et la matrice*

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

.

2. *On divise D en petits carrés de longueur p (paramètre à choisir). Avec la commande `meshgrid`, construisez une matrice Z dont les coefficients représentent les affixes de ces carrés. Par exemple pour $p = 2$*

$$Z = \begin{pmatrix} -2+2i & 2i & 2+2i \\ -2 & 0 & 2 \\ -2-2i & -2i & 2-2i \end{pmatrix}$$

3. *Ecrire la fonction `Newt` qui effectue une étape dans la méthode de Newton. Cette fonction devra accepter des matrices en entrée.*

4. *Résoudre $F(x, y) = 0$ par la méthode de Newton initialisée sucessivement en chaque point de Z. On mémorisera dans un tableau T le numéro k entre 1 et 3 de la racine $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ vers lequel l'algorithme aura convergé, et dans un second tableau TN le nombre d'itérations nécessaires.*

5. *Tracer une représentation graphique des deux tableaux.*