TD1 : Méthodes de recherche de zéros de fonctions

Exercice 1 (Dichotomie). On considère la fonction polynomiale de degré 3

$$f(x) = 343x^3 + 294x^2 + 84x + 2$$

1. Montrer que sa dérivée est toujours positive.
2. En déduire qu'elle admet un zéro unique dans $\mathbb{R}$
3. Donner une représentation graphique de la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. Calculer le zéro de f par la méthode de dichotomie.

Exercice 2 (Méthode de Newton). On cherche un zéro de $f(x) = x^2 - 2$ en prenant pour valeur initiale de la suite de Newton $x_0 = 1$.

1. Donner l'expression de x_{n+1} le $(n + 1)$ -ième élément de la suite de Newton en fonction de x_n .
2. Montrer par récurrence que $x_n \geq 1$ puis que $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$.
3. Déduisez-en que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n}}$.
4. Combien de décimales exactes obtient-on avec x_5 ? Avec x_{10} ?

Exercice 3 (Point fixe). L'objectif de cet exercice est de calculer l'unique racine positive x^* de l'équation $f(x) = 0$ où

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

Pour cela nous allons appliquer la méthode de point fixe aux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}g_1(x) &= e^x - 2 \\g_2(x) &= \ln(x + 2).\end{aligned}$$

1. Comment les fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ? Détaillez vos réponses.
2. Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (Justifiez)
3. En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g_1 et g_2 convergent.
4. Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des deux méthodes de point fixe.
5. Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de $x_0 = 1$.

Exercice 4. Considérez l'équation $x(1 + e^x) = e^x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle l dans $[0, 1]$.
2. Ecrire la méthode de Newton pour approcher l .

3. Proposer une autre méthode de point fixe pour approcher l . Montrer que cette méthode converge vers l pour tout $x_0 \in [0, 1]$.

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $-2 < f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$. On définit la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n)$$

avec $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donnés.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. En déduire qu'il existe un unique l de $\mathbb{R}$ tel que $f(l) = 0$.
3. Montrer que si $0 < \alpha < 1$, la fonction g définie par $g(x) = x + \alpha f(x)$ vérifie $|g'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la convergence de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si $0 < \alpha < 1$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
5. La suite converge-t-elle pour $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f .

1. Indiquer les 4 intervalles disjoints qui contiennent chacune une et une seule racine de f .
2. Montrer qu'il existe une unique racine x^* entre 0 et 1.
3. Soit la méthode de point fixe :

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k) \\ x_0 \in]0, 1[\end{cases} \quad (1)$$

avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$. Etudier la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

4. Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de f .
5. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier votre réponse.

Exercice 7 (Newton en 2D). Soit Q le polynôme

$$Q(t) = t^2 - St + P$$

avec S, P deux réels vérifiant $S^2 - 4P > 0$. Le polynôme Q admet donc deux racines réelles $x_0 \neq y_0$

1. Montrer que trouver x_0 et y_0 revient à résoudre

$$\begin{aligned} xy - P &= 0 \\ (x + y) - S &= 0 \end{aligned}$$

2. Comment s'écrit la méthode de Newton pour résoudre $F(x, y) = 0$ quand F est une application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$?
3. Désormais F est l'application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} xy - P \\ (x + y) - S \end{pmatrix}$$

calculer $J(x, y)$ la matrice jacobienne de $F(x, y)$.

4. Vérifier que la méthode de Newton pour résoudre $F(x, y) = (0, 0)$ s'écrit ici

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{Q(x_n)}{x_n - y_n} \\ \frac{Q(y_n)}{y_n - x_n} \end{pmatrix}$$