Algorithme du pivot de Gauss

1 Exercice préparatoire

Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss détaillé ci-dessus au système linéaire suivant, en détaillant les différentes étapes :

$$Ax = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 Programmation de l'algorithme du pivot de Gauss

On décompose l'algorithme en plusieurs étapes. Programmez les fonctions suivantes et testez-les :

- la fonction `verif_size(A)`, qui prend en argument une matrice A et renvoie un message d'erreur si cette matrice n'est pas une matrice carrée.
- la fonction `recherche_pivot(A,i)`, qui renvoie l'indice de ligne d'un pivot possible à partir de la ligne i , en supposant que les $i - 1$ premières étapes de l'algorithme du pivot de Gauss ont déjà été effectuées sur la matrice A .
- la fonction `echange_lignes(A,i,j)`, qui échange les lignes i et j de la matrice A .
- la fonction `transvection(A,k,i,coeff)`, qui modifie la matrice A en soustrayant à sa ligne k la ligne i multipliée par le coefficient `coeff`.

- la fonction `remontee(U, c)`, qui prend pour argument une matrice triangulaire supérieure U et un second membre b et résoud le système linéaire $Ux = b$ en calculant les coefficients de x en partant du dernier et en remontant jusqu'au premier.

3 Programmation de l'algorithme du pivot de Gauss (fin)

A l'aide des fonctions ci-dessus, programmez l'algorithme du pivot de Gauss et testez-le sur la matrice du premier exercice.

4 Application du pivot de Gauss

Résolvez les deux systèmes suivants avec votre programma du pivot de Gauss. Qu'en pensez-vous ?

$$\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 40 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 41 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$$

On dit que la matrice de ce système linéaire est mal-conditionnée.