

## Abstract

Il seguente lavoro di tesi ha come oggetto l'analisi dell'accoppiamento di un modello iperbolico 1D e di un modello a parametro concentrato per l'analisi dei flussi sanguigni nel sistema cardio-circolatorio.

In particolare si é andati a studiare il caso in cui i tempi caratteristici del circuito esterno influenzano pesantemente le condizioni di stabilit  determinando condizioni pi  restrittive di quelle per il modello 1D (condizione CFL).

La tesi   strutturata in tre sezioni.

La prima tratta la derivazione dei modelli e le assunzioni modellistiche su cui si basano.

La seconda analizza un problema modello prima da un punto di vista analitico (sono provate esistenza, unicit  e dipendenza continua dai dati della soluzione) e successivamente da un punto di vista numerico proponendo e studiando alcuni metodi alle differenze finite per la sua risoluzione.

Infine la terza consta di tre esempi numerici in cui vengono verificate le conclusioni teoriche della sezione precedente.

# 1 Introduzione modellistica

Quando periodicamente il cuore si contrae, il sangue viene spinto dal ventricolo sinistro nell'aorta attraverso la valvola aortica e simultaneamente dal ventricolo destro nell'arteria polmonare attraverso l'omonima valvola. Queste due arterie, essendo elastiche, si espandono quando ricevono un flusso di sangue ad una velocità maggiore rispetto a quella a cui lo trasferiscono negli organi periferici e nei polmoni rispettivamente. L'espansione dei vasi determina un incremento dello sforzo e della deformazione nella parete arteriosa: un vaso sanguigno su cui è applicata una pressione maggiore premerà più forte il sangue che contiene. Naturalmente come risultato si avrà un aumento della pressione arteriosa. Inoltre dal momento che il flusso in ingresso supera il flusso in uscita, abbiamo una diminuzione del flusso sanguigno la cui diretta conseguenza è la creazione di un gradiente di pressione longitudinale verso la valvola aortica. Questi due fattori portano la valvola sopraccitata a chiudersi dalla parte dell'aorta. Questo meccanismo determina una significativa riduzione della variazione di pressione rispetto a quella che si ha nel ventricolo sinistro.

Una volta trasmesso all'aorta, l'impulso generato dal battito cardiaco viene trasmesso alla restante parte del sistema circolatorio. Se pensiamo per fissare le idee che questo si propaghi come un'onda elastica<sup>1</sup>, non è difficile convincersi che ad ogni biforcazione le "onde" saranno parzialmente riflesse e parzialmente trasmesse ai rami figli.

E' evidente che il processo descritto sopra possa essere analizzato sotto vari livelli di generalità, come del resto storicamente è accaduto<sup>2</sup>. A rigore il cuore, l'aorta e le arterie dovrebbero essere rappresentati da modelli tridimensionali in cui si tiene conto della speciale geometria del sistema e dai materiali di cui sono composti i vari organi, oltretutto le equazioni che regolano il flusso nei singoli elementi non potranno che essere fra di loro accoppiate. Tuttavia a causa del numero di vasi coinvolti e della moltitudine di differenti scale necessarie a rappresentare accuratamente il flusso nelle varie regioni del sistema cardiovascolare, le simulazioni del flusso di sangue basate su modelli tridimensionali (modelli cioè in cui i vasi sono rappresentati come continui tridimensionali ed a frontiera variabile) sono molto onerosi per i computer attuali, inoltre l'enorme quantità di dati che genererebbero sarebbe di difficile interpretazione clinica. D'altra parte è possibile semplificare il modello 3D sfruttando la morfologia sostanzialmente cilindrica dei vasi: sebbene l'approssimazione sia notevole, questa produce risultati numerici affidabili ad un costo computazionale sostenibile. In aggiunta l'interpretazione del modello è molto semplice e ciò lo rende ideale per la pratica clinica. In questo lavoro si considereranno in particolare:

1. modelli 1D in cui la dipendenza spaziale è ridotta alla coordinata assiale

---

<sup>1</sup>L'evoluzione del flusso sanguigno è assimilabile alla propagazione di onde elastiche solamente in riferimento ad un modello molto approssimato, tuttavia tale identificazione riesce a dare un'idea qualitativamente corretta del fenomeno reale, per maggiori dettagli si veda [1].

<sup>2</sup>L'analisi del sistema cardiocircolatorio sotto questa luce ha una storia di almeno due secoli. Di seguito mi limito a citare due importanti opere: la *Windkessel theory* di Otto Frank (1899) e i *Principia pro motu sanguinis per arterias determinado* di Eulero (1775).

2. modelli a parametro concentrato (o 0D) dove la dipendenza spaziale é discretizzata attraverso la suddivisione del sistema cardiovascolare in un insieme di sottosistemi (in inglese *compartment*). Il modello matematico associato é in questo caso tipicamente basato su equazioni algebrico-differenziali.

Prima di inserire la derivazione del modello 1D, credo sia opportuno parlare delle ipotesi sulle equazioni costitutive dei materiali in analisi, in primis il sangue e le pareti arteriose.

A rigore il sangue é caratterizzato da un coefficiente di viscositá che dipende dalla velocitá e quindi non é esattamente assimilabile ad un fluido newtoniano. Tuttavia la componente non-Newtoniana risulta essere trascurabile in prima approssimazione e quindi nel presente lavoro si guarderá al sangue come ad un fluido newtoniano incomprimibile. Per quanto concerne invece l'equazione costitutiva dei vasi sanguigni questa coincide con l'equazione costitutiva dei materiali che li compongono. Anche in questo caso l'equazione generale é estremamente complessa ed il suo utilizzo avrebbe costi computazionali enormi data la non linearitá; per questa ragione di seguito si supporrá che la parete arteriosa ubbidisca alla legge di Hooke <sup>3</sup>.

La derivazione che segue trae le basi dai principali risultati della meccanica dei continui, pertanto rimandando ad esempio a [3] per maggiori dettagli introduciamo alcuni concetti e definizioni fondamentali.

Dato uno spazio euclideo  $\mathcal{E}$  <sup>4</sup> sia  $I$  un intervallo temporale e sia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$  un aperto con frontiera regolare che descrive la regione dello spazio euclideo occupata da un corpo continuo in una certa configurazione di riferimento (che puó essere un certo istante del tempo ad esempio  $t = 0$ ). Definiamo *moto* una funzione

$$\mathbf{x} : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathcal{E}$$

ed indichiamo con  $\mathbf{f}_t := \mathbf{x}(*, t)$  la *deformazione* di  $\mathcal{B}$  all'istante  $t$ . Sotto l'ipotesi che  $\mathbf{x}$  sia di classe  $C^1$ , derivabile due volte rispetto al tempo ed iniettiva, tale deformazione si dice regolare e possiamo introdurre il *gradiente di deformazione*  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f}$ .

Allo scopo di definire un opportuno concetto di velocitá <sup>5</sup> introduciamo la traiettoria:

$$\mathcal{T} = \{(q, t) : t \in I, q \in \mathbf{x}(\mathcal{B}, t)\}$$

---

<sup>3</sup>Se l'approssimazione del sangue come fluido Newtoniano é generalmente accettata, d'altra parte modelli piú precisi vengono utilizzati per le pareti dei vasi. In tal senso si vedano [4] e [5]

<sup>4</sup>Un insieme di punti  $\mathcal{E}$  si dice spazio euclideo  $n$ -dimensionale se esiste uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  e dotato di prodotto scalare, tale che:

1.  $u : \mathcal{E} \rightarrow V \quad \forall u \in V$
2.  $(u + v)(x) = u(v(x)) \quad \forall u, v \in V \quad \forall x \in \mathcal{E}$
3.  $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad \exists! u \in V : u(x) = y$

<sup>5</sup>Naturalmente potremmo introdurre la velocitá (detta materiale) di un punto  $p \in \mathcal{B}$  come  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(p, t)$ , tuttavia tale concetto richiede di isolare ciascun punto materiale in una determinata configurazione iniziale e perció non si addice alla meccanica dei fluidi

e denominiamo *velocità spaziale* la funzione:

$$\mathbf{v} : \mathcal{T} \rightarrow V \quad \text{tale che} \quad \mathbf{v}(q, t) := \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_t^{-1}, t)$$

A partire dalla velocità spaziale (altresí detta euleriana) costruiamo i seguenti due tensori<sup>6</sup>: il *gradiente di velocità*  $L := \nabla_q \mathbf{v}$  ed il tensore *velocità di deformazione*<sup>7</sup>  $D := \text{sym}(L)$ .

Chiariamo inoltre cosa si intenda con derivata materiale rispetto al tempo (che nel seguito sarà indicata con  $\frac{D}{Dt}$ ).

Sia  $\phi_m(p, t)$  un campo scalare materiale (ovvero definito nella configurazione di riferimento), e sia  $\phi(q(p, t), t)$  il corrispondente campo scalare spaziale. Definiamo la *derivata materiale rispetto al tempo* come:

$$\dot{\phi} = \frac{D}{Dt} \phi(q(p, t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla_q \phi \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \phi_m(p, t)$$

La derivata materiale fornisce la variazione di  $\phi$  lungo le traiettorie, mentre  $\frac{\partial}{\partial t} \phi$  fornisce la variazione di  $\phi$  mantenendosi fissi in una posizione.

Prima di concludere specifichiamo quali siano le ipotesi fisiche alla base della teoria a cui nel seguito ci si riferirá.

- Vale il postulato di conservazione della massa. A partire da esso si ricava che, detta  $\rho$  la densità:

$$\dot{\rho} + \rho(\text{div} \mathbf{v}) = 0$$

- *Ipotesi di Cauchy*: esiste una densità superficiale di forze  $\mathbf{s}(\nu, q, t)$  che é la forza esercitata attraverso un'area di normale  $\nu$  in  $(q, t)$  dal lato di  $\nu$  lato di  $-\nu$ .
- Sussistono le equazioni di bilancio<sup>8</sup>.

A partire dalle ipotesi precedenti é possibile provare (*teorema di Cauchy*) che definito  $\mathbf{f}^b$  un campo di forze di volume:

$$\forall (q, t) \in \mathcal{T}, \exists \text{ un tensore simmetrico } \mathbf{T}(q, t) :$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\nu) = \mathbf{T}\nu \\ \rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}^b + \text{div}(\mathbf{T}) \end{cases}$$

$\mathbf{T}$  é detto *tensore degli sforzi di Cauchy*.

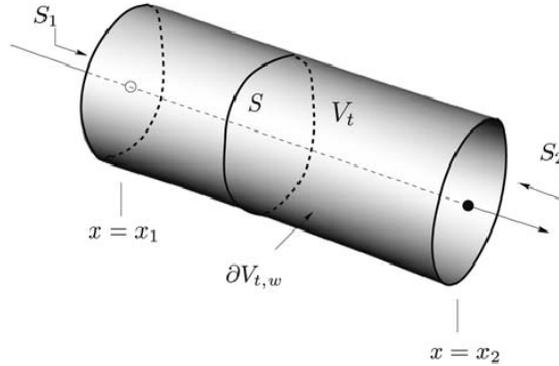


Figura 1: modello di vaso

## 1.1 Le equazioni di bilancio

Consideriamo come modello dell'arteria un tubo il cui asse sia rettilineo e coincida con l'asse  $x$ . Con riferimento alla terminologia precedentemente introdotta stiamo asserendo che la configurazione di riferimento dell'arteria che stiamo considerando é (in coordinate cilindriche):

$$\mathcal{B} = \{(r, \theta, x) : r = R_0(x), \theta \in [0, 2\pi), x \in [x_1, x_2]\}$$

Siano rispettivamente  $\mathbf{u}_b$  la velocità del bordo del volume di fluido  $\partial V_{t,w}$  e  $\mathbf{u}_w$  la velocità della parete dell'arteria. Le velocità  $\mathbf{u}_b$  e  $\mathbf{u}_w$  debbono coincidere su  $\partial V_{t,w}$  (ipotizziamo cioè che all'interfaccia il fluido aderisca perfettamente).

Considereremo il sangue, come peraltro già affermato in precedenza, un fluido newtoniano incomprimibile che soddisfa l'equazione costitutiva

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{D}$$

dove  $p$  é la pressione mentre  $\mathbf{D}$  é il tensore gradiente di velocità.

<sup>6</sup>Un tensore é un'applicazione lineare  $L : V \rightarrow V$

<sup>7</sup>Il nome velocità di deformazione può essere motivato dalla seguente proprietà geometrica:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d(q + \epsilon \mathbf{u}, q)}{d(q + \epsilon \mathbf{u}, q)} = \mathbf{u} \cdot D\mathbf{u}$$

Se immaginiamo per fissare le idee che  $\mathbf{u}$  sia un autovettore di  $D$ , il segno dell'autovalore ci dirá se i punti lungo  $\mathbf{u}$  si stanno allontanando oppure avvicinando e con quale velocità.

<sup>8</sup>Le equazioni di bilancio sono equazioni estremamente generali, qui non inserite per brevità, che sono adattate ad ciascun caso specifico. Nel seguito quando si parlerá di equazioni di bilancio se ne parlerá limitatamente al caso in esame.

Siano  $f = f(t, \mathbf{x})$  una funzione continua e  $\mathbf{u}$  la velocità del fluido, allora per il teorema del trasporto (o di Reynolds)<sup>9</sup> sappiamo che:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f dV = \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} f dV + \int_{\partial V_{t,w}} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (1)$$

Consideriamo il secondo termine del membro di destra, grazie alla banale osservazione che  $\mathbf{u}_b$  é ortogonale a  $\mathbf{n}$  in  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\int_{\partial V_t} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Definiamo adesso  $w = \mathbf{u}_w - \mathbf{u}$  velocità relativa fra la parete del vaso ed il fluido<sup>10</sup>. Al fine di ottenere un modello 1D a partire dalle leggi di conservazione consideriamo il valore medio di  $f$  sulla sezione di area  $A(\mathbf{x}, t)$ :

$$\bar{f} = \frac{1}{A} \int_S f d\sigma, \quad \bar{f} = \bar{f}(x, t)$$

Segue immediatamente per il *teorema di Fubini Tonelli*<sup>11</sup> che:

$$\int_{V_t} f dV = \int_{x_1}^{x_2} A \bar{f} dx$$

ed essendo  $x_1$  e  $x_2$  indipendenti dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f dV = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (A \bar{f}) dx$$

Passando al II termine del teorema del trasporto, la presenza di una parete permeabile rende il suo studio piú complesso:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{\partial V_t} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{S_1} f u_1 d\sigma - \int_{S_2} f u_1 d\sigma \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Siano  $\mathcal{B}_t := \mathbf{x}(\mathcal{B}, t)$  e sia  $\psi$  una funzione scalare definita sulla traiettoria  $\mathcal{T}$ . Allora si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \psi(q, x) dV = \int_{V_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \psi(q, t) (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma = \int_{\mathcal{B}_t} \dot{\psi} + \psi \operatorname{div} \mathbf{v} dV =$$

<sup>10</sup>Qui  $\mathbf{u}_w$  é a priori diverso dalla velocità del fluido  $\mathbf{u}$  per considerare l'eventualità di una parete permeabile

<sup>11</sup>Siano  $\mu_x$  e  $\mu_y$  due misure su  $(E, \mathcal{E})$  e  $(F, \mathcal{F})$  rispettivamente.

Per ogni funzione  $f$  che sia  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ -misurabile e integrabile rispetto a  $\mu_x \otimes \mu_y$ , la funzione  $x \rightarrow \int f(x, y) \mu_y(dy)$  é  $\mathcal{E}$ -misurabile e:

$$\int f d\mu_x \otimes \mu_y = \int \left\{ \int f(x, y) \mu_y(dy) \right\} \mu_x(dx)$$

ed applicando il teorema di Gauss

$$\int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{S_1} f u_1 d\sigma - \int_{S_2} f u_1 d\sigma + \int_{V_t} \operatorname{div}(f \mathbf{u}) dV + \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Osserviamo che i flussi attraverso  $S_1$  e  $S_2$  sono funzioni di  $x$  e  $t$ , quindi fissato il tempo possiamo reinterpretarli grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale applicato per la variabile spaziale:

$$\int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (A f \bar{u}_1) dx + \int_{V_t} \operatorname{div}(f \mathbf{u}) dV$$

Sostituendo tutti i termini nell'espressione del teorema di Reynolds e siccome  $x_1$  e  $x_2$  sono arbitrari per il lemma di localizzazione<sup>12</sup> possiamo concludere:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial x} (A f \bar{u}_1) = \int_S \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) d\sigma + \int_{\partial S} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\gamma \quad (2)$$

La formula ottenuta vale sia per fluidi comprimibili che per fluidi incomprimibili.

## Conservazione della massa

Nel contesto nel quale stiamo operando risulta del tutto sensato assumere la conservazione della massa. In effetti la (2) con  $f \equiv 1$  e nell'ipotesi di fluido incomprimibile ( $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ ) riflette tale postulato.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u}_1) = \int_{\partial S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\gamma \quad (3)$$

dove il termine di destra può essere visto come il sangue che attraversa una sezione  $S$  di arteria per unità di lunghezza e di tempo. Supponiamo da adesso in poi che il fluido newtoniano sia incomprimibile.

## Bilancio del momento

Consideriamo nell'equazione (2)  $f = u_1$ . Si ha dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u}_1^2) = \int_S \frac{D u_1}{D t} d\sigma + \int_{\partial S} u_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\gamma \quad (4)$$

Grazie al teorema di Cauchy e definendo  $\mathbf{f}^b$  la forza di volume (*body force*):

$$\int_{V_t} \frac{D \mathbf{u}}{D t} dV = \int_{V_t} f^b dV + \int_{V_t} \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{T}) dV$$

ed integrando per strati:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \int_S \frac{D \mathbf{u}}{D t} d\sigma \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_S \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{T}) + f^b \right) d\sigma dx$$

<sup>12</sup>Sia  $f$  una funzione reale e continua e supponiamo che  $\forall x_1, x_2 \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 0$  allora  $f \equiv 0$

dall'arbitrarietà di  $x_1$  e  $x_2$  si ha che le integrande debbono essere uguali. Scriviamone la componente  $x$ , ponendo  $\mathbf{d} = \text{div}\mathbf{D}$ :

$$\int_S \frac{Du_1}{Dt} d\sigma = \int_S f_1^b + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + d_1 \right) d\sigma$$

e sostituiamo quanto ottenuto nella (4):

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x}(A\bar{u}_1^2) = \frac{A}{\rho}(\rho f_1^b - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{d}_1) + \int_{\partial S} u_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Al fine di rendere l'equazione piú trattabile facciamo due assunzioni di carattere strettamente modellistico. Prima però chiariamo cosa si intende per profilo di velocità. E' chiaro dalla discussione fatta che a priori  $\mathbf{u}$  sia funzione in coordinate cilindriche di  $x, r, \theta$ . Assumiamo adesso che  $u(x, r, \theta) = u(x)\phi(r, \theta)$ , in tal caso  $\phi$  viene detto profilo di velocità e se  $\phi$  é un paraboloide si parla di profilo parabolico, se  $\phi$  é costante di profilo piatto.

1. Una volta assunto che la velocità abbia un profilo  $\Phi$ , si pone:

$$\bar{u}_1^2 = \alpha(\bar{u}_1)^2$$

dove  $\alpha$  é un coefficiente (detto di Coriolis) funzione del profilo della velocità. Per un profilo piatto si ha  $\alpha = 1$ , mentre per un flusso parabolico  $\alpha = \frac{4}{3}$ .

2. Ipotizziamo inoltre che il termine che tiene conto della viscosità  $\bar{d}_1$  sia una funzione lineare della velocità media del flusso normale alla superficie A:

$$\frac{A}{\rho} \bar{d}_1 = -K_R \bar{u}_1$$

dove  $K_R > 0$  é una costante che rappresenta la resistenza viscosa del fluido per unità di lunghezza del tubo.

Si ottiene quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x}(A\bar{u}_1^2) = A f_1^b - \frac{A}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - K_R \bar{u}_1 + \int_{\partial S} u_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (5)$$

## 1.2 Modelli semplificati della meccanica della parete arteriosa

Al fine di chiudere il sistema di equazioni (finora composto dalla (3) e dalla (5)) é necessaria una ulteriore equazione che sará fornita da un modello che descriva le proprietà della parete del vaso e che si tradurrá in una relazione pressione-sezione nel vaso.

Tali modelli si basano su alcune assunzioni che di seguito enumeriamo, benché alcune di esse siano già state citate nell'introduzione.

1. Dato che lo spessore dell'arteria é molto inferiore al raggio medio, possiamo descrivere la parete attraverso la superficie generata dal raggio medio. Inoltre possiamo anche supporre che lo spessore sia costante nella configurazione di riferimento.
2. La configurazione di riferimento della nostra arteria  $\mathcal{B}$  usata per la derivazione del modello é un cilindro circolare e supponiamo che il vettore spostamento  $\eta$  abbia solamente una componente radiale che é:

$$\eta = \eta \mathbf{e}_r = (R - R_0) \mathbf{e}_r$$

in formule:

$$\mathcal{B} = \{(r, \theta, x) : r = R_0(x), \theta \in [0, 2\pi), x \in [x_1, x_2]\}$$

$$\mathcal{B}_t = \{(r, \theta, x) : r = R(\theta, x, t), \theta \in [0, 2\pi), x \in [x_1, x_2]\}$$

3. La struttura del vaso é soggetta ad uno sforzo piano, assumiamo cioé che le componenti dello sforzo normali siano trascurabili.
4. Assumiamo che il gradiente di deformazione sia piccolo in modo che il comportamento della struttura sia sostanzialmente quello di un solido lineare.
5. Ipotizziamo che la parete del vaso sia incomprimibile.

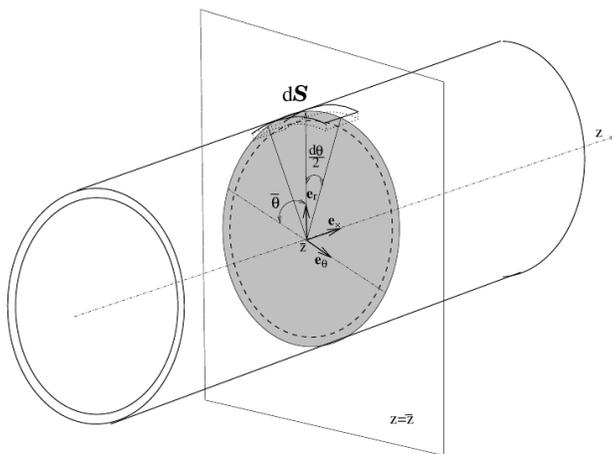


Figura 2: modello geometrico del vaso

## Forze agenti sulla parete del vaso

Consideriamo il vaso ad un dato istante  $t$  nella sua configurazione attuale ed un generico punto della sua superficie di coordinate  $\theta = \bar{\theta}$ ,  $x = \bar{x}$ . Se non specificato le quantità saranno sempre calcolate nel punto  $(R(\bar{\theta}, \bar{x}, t), \bar{\theta}, \bar{x})$  e al tempo  $t$ . Indicheremo con  $d\sigma$  la misura del seguente elemento di superficie:

$$dS = \left\{ (r, \theta, x) : r = R(\theta, x, t), \theta \in \left[ \bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}, \bar{\theta} + \frac{d\theta}{2} \right], x \in \left[ \bar{x} - \frac{dx}{2}, \bar{x} + \frac{dx}{2} \right] \right\}$$

Nella figura all'inizio della pagina seguente sono indicati i due principali sforzi, lo sforzo tangenziale  $\sigma_\theta$  e longitudinale  $\sigma_x$  che in base all'ipotesi (3) rappresentano le forze interne agenti sulla porzione considerata.

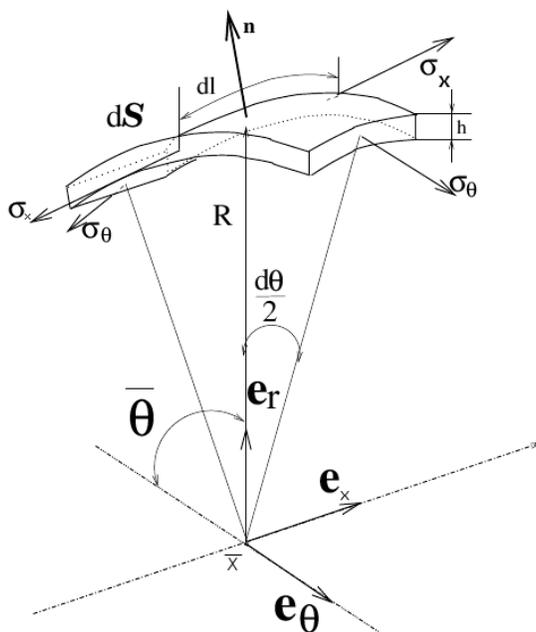


Figura 3: Porzione infinitesima di vaso usata per la derivazione del modello

Con qualche semplice calcolo possiamo esprimere  $\mathbf{n}$  e  $d\sigma$  come segue:

$$\mathbf{n} = R_0 g^{-1} \left( R \mathbf{e}_r - \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - R \frac{\partial R}{\partial x} \mathbf{e}_x \right)$$

$$d\sigma = g R_0 d\theta dx = g d\sigma_0$$

dove  $g = \frac{R}{R_0} \left( 1 + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  In particolare:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{R}{R_0} g^{-1}$$

e

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma = R d\theta dx$$

Infine se indichiamo con  $dl$  l'elemento infinitesimo lungo la direzione longitudinale (cioé a  $\theta$  fissato) si ha:

$$dl = \left( 1 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Osservo che rielaborando le relazioni precedenti si trova:

$$d\sigma = R \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}^{-1} d\theta dx \quad (6)$$

Consideriamo le forze esterne che agiscono sull'elemento di superficie  $dS$

- *Forze dai tessuti circostanti*: i tessuti circostanti interagiscono con il vaso attraverso una pressione che in prima approssimazione può essere ritenuta costante quindi:

$$\mathbf{f}_{\text{tissue}} = -P_{ext} \mathbf{n} d\sigma + o(d\sigma)$$

- *Forze provenienti dal fluido*: le forze che il fluido esercita sulla parete del vaso sono rappresentate dal tensore degli sforzi di Cauchy sulla parete. Dunque indicato tale tensore con  $\mathbf{T}_f$  si ha:

$$\mathbf{f}_{\text{fluid}} = -\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} d\sigma + o(d\sigma) = (pn - 2\mu \mathbf{D}\mathbf{n}) d\sigma + o(d\sigma)$$

## Il modello dell'anello indipendente

Il modello dell'anello indipendente *the independent ring model* é espresso da una equazione differenziale per l'evoluzione temporale di  $\eta$  per ogni  $x$  e  $\theta$ . Per la derivazione del modello (ripresa da [6]) facciamo alcune assunzioni ulteriori:

- *Dominanza dello sforzo tangenziale*  $\sigma_\theta$  (ció porterá a trascurare gli sforzi longitudinali nell'equazione del momento)
- *Configurazione cilindrica*: assumiamo che il vaso rimanga un cilindro circolare durante il moto cioé:  $\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$ . Questa ipotesi potrebbe essere parzialmente rimossa se ammettiamo piccole variazioni del raggio.
- *Comportamento elastico-lineare*: grazie alle due ipotesi precedenti possiamo senz'altro scrivere che lo sforzo tangenziale sia proporzionale allo spostamento normale cioé:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \xi^2} \frac{\eta}{R_0}$$

dove  $\xi$  é il coefficiente di Poisson ( $\xi = 0.5$  per l'ipotesi di incomprimibilitá dei tessuti)  $E$  é invece il modulo di Young.

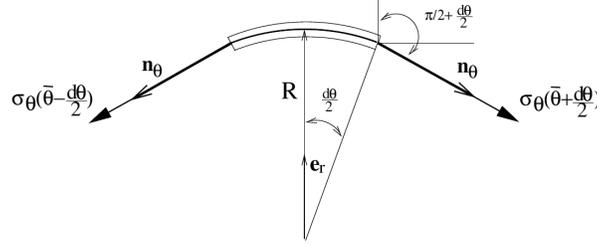


Figura 4: Calcolo dell'angolo fra  $\sigma_\theta$  e la direzione radiale  $e_r$

In virtù delle ipotesi precedenti scriviamo il bilancio del momento in direzione radiale analizzando il sistema di forze agente su  $dS$ . Avendo già esaminato le forze esterne, dobbiamo esaminare gli effetti delle forze interne che per ipotesi riguardano solamente il tensore tangenziale  $\sigma_\theta$ . Consideriamo la figura sottostante:

Osserviamo che i vettori  $\mathbf{e}_\theta(\theta + \frac{d\bar{\theta}}{2})$  e  $\mathbf{e}_\theta(\theta - \frac{d\bar{\theta}}{2})$  formano con  $\mathbf{e}_r$  un angolo rispettivamente  $\frac{\pi}{2} \pm \frac{d\bar{\theta}}{2}$ .

La componente del risultante delle forze interne in direzione radiale é dunque:

$$f_{int} = (\sigma_\theta \mathbf{e}_\theta(\theta + \frac{d\bar{\theta}}{2}) + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta(\theta - \frac{d\bar{\theta}}{2})) \cdot \mathbf{e}_r h dl = -\sigma_\theta h d\bar{\theta} dl + o(d\bar{\theta} dl)$$

Dall'ipotesi (5) di incomprimibilità il volume rimane invariato cioè:

$$h R d\bar{\theta} dl = h_0 R_0 d\theta dx$$

ed essendo  $o(dl) = o(dx)$  la risultante delle forze interne risulta pari a:

$$f_{int} = -\frac{E h_0}{1 - \xi^2} \frac{\eta}{R} d\theta dx + o(d\theta dx)$$

Infine la massa della porzione di vaso considerata é:

$$mass = \rho_\omega h R d\bar{\theta} dl = \rho_\omega h_0 R_0 d\theta dl$$

dove  $\rho_\omega$  é la densità del tessuto del vaso, mentre l'accelerazione lungo la direzione radiale é:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Scriviamo allora il bilancio del risultante delle forze interne e delle forze esterne con il termine inerziale:

$$\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{a} = (\mathbf{f}_{int} + \mathbf{f}_{ext}) \cdot \mathbf{n}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\rho_\omega h_0 R_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx = -\frac{E h_0}{1 - \xi^2} \frac{\eta}{R} d\theta dx - 2\mu \mathbf{Dn} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma + (p - P_{ext}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma + o(d\theta dx)$$

e ricordando la (6) ed il fatto che la derivazione é stata fatta considerando un piano  $\theta = \bar{\theta}$  ed un tempo  $t$  arbitrario otteniamo il modello dell'anello indipendente:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + b\eta = H \quad \text{in } \Gamma_0^\omega, t \in I \quad (7)$$

con  $b = \frac{E}{\rho_\omega(1-\xi^2)R_0^2}$  coefficiente legato alle proprietá meccaniche della parete,  $H = \frac{\rho}{\rho_\omega h_0} \left[ \frac{R}{R_0}(p - p_{ext}) - 2g\nu \mathbf{Dn} \cdot \mathbf{e}_r \right]$  ( $\nu$  é la viscositá cinematica).

La (7) puó essere ulteriormente semplificata se si trascura l'accelerazione. In questo modo si ottiene il seguente modello algebrico che é spesso adottato nella letteratura medica e bioingegneristica (e sará alla base del modello studiato in questo lavoro):

$$b\eta = H \quad (8)$$

Si osservi che secondo quest'ultima formula lo spostamento della parete é proporzionale alla componente normale delle azioni esterne applicate.

Infine é da precisare che il modello derivato non é certamente il piú generale fra i proposti, in particolare non considera l'azione di  $\sigma_x$ .

Esiste un modello (il " *generalised string model* ") che assume come componente dominante proprio  $\sigma_x$ <sup>13</sup>.

La (8) viene riespressa in termini di  $A$  e  $p$  nel modo seguente:

$$p = P_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad \text{con} \quad \beta = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \xi^2) A_0}$$

oppure

$$p = P_{ext} + \frac{4}{3} \frac{Eh}{R_0} \left( \frac{R - R_0}{R_0} \right) \quad (9)$$

in questa ultima forma la relazione é nota come legge di Hooke.

Unendo le equazioni (5) e (9) ed imponendo la conservazione della massa otteniamo il modello:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(A\bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x}(A\bar{u}_1^2) = Af_1^b - \frac{A}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - K_R \bar{u}_1 + \int_{\partial S} u_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(A\bar{u}_1) = \int_{\partial S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\gamma \\ p = P_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \end{cases} \quad (10)$$

*Osservazione:* é possibile provare che il sistema é chiuso cioé che sotto opportune condizioni iniziali abbiamo esistenza ed unicitá della soluzione.

## Formulazione alternativa

Assumiamo per semplicitá che la parete (" *lumen* ") sia impermeabile e che le forze di volume siano trascurabili ( $f^b = 0$ ).

Alleggeriamo la notazione indicando con  $u$  e  $p$  rispettivamente  $\bar{u}_1$  e  $\bar{p}$  e definiamo la portata  $q = Au = \int_S u d\sigma$  il flusso di sangue attraverso una sezione.

<sup>13</sup>si rimanda a [6] per la derivazione

Siamo dunque pronti per scrivere le equazioni a cui va poi aggiunta l'equazione che regola la meccanica della parete:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \frac{q^2}{A}) + K_R \frac{q}{A} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Il sistema precedente insieme a quello descritto nel precedente paragrafo sono alla base di numerosi schemi numerici, tuttavia per ragioni di semplicità in questo lavoro si analizzerà solamente il modello linearizzato.

### 1.3 Il modello lineare

Consideriamo il sistema di equazioni precedente di seguito riespresso trascurando il termine convettivo  $\frac{\partial}{\partial x}(\alpha \frac{q^2}{A})$  e ponendo  $K_R = 8\pi\nu$  e  $\alpha = \frac{4}{3}$  corrispondente ad un profilo di velocità parabolico.

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + 8\pi\nu \frac{q}{A} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Ipotizziamo adesso che  $A \simeq A_0 = \pi R_0^2$ . Dalla legge di Hooke otteniamo derivando parzialmente rispetto al tempo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \left( \frac{3R_0^2}{4Eh} \right) = \frac{\partial R}{\partial t}$$

e dunque:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} = c \frac{\partial p}{\partial t}$$

sostituendo quest'ultima relazione nel sistema otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + r q + \frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

dove  $r = \frac{8\pi\nu}{A_0}$ ,  $l = \frac{\rho}{A_0}$ ,  $c = \frac{3\pi R_0^3}{2Eh}$  sono dette rispettivamente viscosità ed inerzia sanguigna e "wall compliance". E' in ultimo importante sottolineare che questi termini dipendono solamente dalla geometria e dalla rigidità ("stiffness") del vaso e dalle proprietà costitutive del sangue. Al fine di dare un'interpretazione intuitivamente efficace possiamo associare i termini del sistema precedente con delle grandezze elettriche corrispondenti. In particolare se identifichiamo il flusso  $q$  con una corrente e la pressione  $p$  con una tensione non è poi difficile convincersi che  $r$ ,  $l$  e  $c$  abbiano rispettivamente il significato di una resistenza, di una induttanza e di una capacità. Per maggiori dettagli si rimanda a [2]

Con opportune condizioni il modello può essere facilmente esteso per comprendere:

- il tasso di flusso  $\phi$  perso lungo il vaso (facendo cadere l'ipotesi di vaso impermeabile)

- un carico concentrato (ad esempio una conduttanza  $G$ ) al termine del vaso in  $x = x_2$

Possiamo in conclusione formulare il nostro problema come:

*trovare  $p(t, x)$  e la portata del flusso  $q(t, x)$  tali che:*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{r} = 0;$$

con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}; \quad H = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{\tau} & 0 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ rq \end{bmatrix};$$

assegnate opportune condizioni al bordo (B.C.) oppure iniziali (I.C.).

Osservazione: Possiamo considerare due condizioni al bordo (una per ogni punto di frontiera  $x = x_1, x = x_2$ ) corrispondenti al fatto che gli autovalori di  $H$  sono di segno opposto, ad esempio  $p_{in}(t)$  in  $x = x_1$  ed il carico concentrato in  $x = x_2$  assumendo una relazione lineare fra flusso e pressione attraverso la conduttanza  $G$ . Per quanto riguarda le I.C. invece, dobbiamo semplicemente assegnare  $p(0, x)$  e  $q(0, x)$ .

#### 1.4 Modelli a parametro concentrato (*Lumped parameters model*)

Grazie alla derivazione precedente possiamo pensare di descrivere i vasi piú importanti del sistema cardiovascolare unendo opportunamente in un unico sistema i modelli 1D dei singoli componenti (in [7] é svolta una simulazione in cui si analizza un sistema composto da 55 vasi). Tuttavia cosí facendo si va incontro a due svantaggi:

1. Non é possibile rappresentare una caratteristica saliente del sistema cardiovascolare ovvero sia la correlazione fra le varie componenti derivante dal fatto che stiamo descrivendo un sistema chiuso. In effetti trattare modelli 1D richiede la prescrizione di dati alquanto accurati a bordi che delimitano il dominio fisico ma di difficile interpretazione.
2. Una descrizione realistica di alcuni elementi complessi del sistema circolatorio (ad esempio il cuore, la circolazione venosa ed il sistema dei capillari) non può essere ottenuta attraverso modelli iperbolici 1D.

Queste difficoltà possono essere risolte attraverso l'introduzione di modelli a parametro concentrato. Questi ultimi sono espressi in termini di sistemi di equazioni (algebrico) differenziali che descrivono la velocità, la pressione e la portata medie (funzioni del tempo) del flusso in uno specifico elemento terminale del sistema cardio-circolatorio.

Dal momento che tali modelli non tengono conto delle variazioni in spazio sono anche detti modelli 0D. Per derivarli si integra in spazio il sistema linearizzato :

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + r q + \frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ottenendo:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{q}}{dt} + r\bar{q} + \frac{1}{l}(p_2 - p_1) = 0 \\ c \frac{d\bar{p}}{dt} + q_2 - q_1 = 0 \end{cases} \quad t > 0$$

dove  $\bar{q}$  e  $\bar{p}$  sono rispettivamente il flusso medio e la pressione media nel componente e

$$q_1(t) = q(0, t), \quad p_1(t) = p(0, t), \quad q_2(t) = q(L, t), \quad p_2(t) = p(L, t)$$

Al fine di chiudere il sistema dobbiamo fare una ulteriore assunzione. Supponiamo che siano disponibili alcuni dati in  $x = x_1, x = x_2$  ad esempio  $q_1, p_2$ . E' ragionevole approssimare le incognite  $\bar{q}$  e  $\bar{p}$  con  $q_2, p_1$ : in effetti se il vaso non é troppo esteso abbiamo sostanzialmente commesso un errore di discretizzazione. Inoltre nel flusso sanguigno la velocità é circa 1-10 metri al secondo quindi l'informazione sul flusso e sulla pressione si propaga quasi istantaneamente fra le due estremitá di un singolo vaso.

Fatta quest'ultima assunzione perveniamo alla definitiva:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad t > 0$$

con

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{-1}{l} \\ \frac{-1}{c} & r \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{c} \\ \frac{-p_2}{l} \end{bmatrix};$$

Il sistema puó essere visto come la descrizione matematica di un circuito elettrico noto come L-network raffigurato sotto.

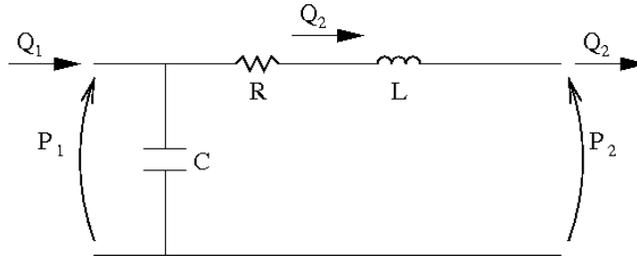


Figura 5: circuito  $\mathcal{L}$ -network

Come già osservato precedentemente nell'analogia idraulica-elettrica pressione e flusso corrispondono a voltaggio e corrente ed  $r, l, c$  a resistenza, induttanza e capacità.

A titolo di esempio é stato presentato il caso in cui siano prescritti  $q_1$  e  $p_2$ , ma naturalmente é possibile trattare anche gli altri casi ( $q_1$  e  $p_2$ ,  $p_1$  e  $p_2$ ,  $q_1$  e  $q_2$ ). Rimandando a [2] per maggiori dettagli si sottolinea che a ciascuno dei problemi é associato un equivalente elettrico.

Quello che abbiamo presentato é il modello a parametro concentrato per il flusso sanguigno in un vaso cilindrico retto. Come non é difficile immaginare, risultano necessari modelli 0D per sistemi piú complessi come ad esempio il cuore oppure la circolazione in un vaso ramificato. Se il cuore puó essere visto come una coppia di pompe<sup>14</sup>, un possibile modello per il sistema cardiovascolare puó essere derivato connettendo fra loro i singoli vasi attraverso appropriate condizioni di raccordo ("*matching conditions*") con le quali fundamentalmente si impone la continuitá del flusso ed il bilancio del momento. Anche in questo caso é interessante sottolineare l'analogia elettrica: il bilancio del momento e la continuitá del flusso corrispondono rispettivamente alla KVL (*Kirchhoff voltage law*) ed alla KCL (*Kirchhoff current law*). Come esempio inserisco l'equivalente circuitale di vaso ramificato.

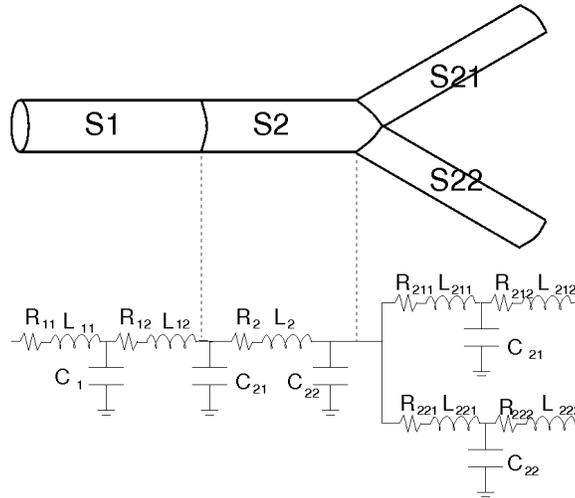


Figura 6: modello a parametro concentrato per un vaso ramificato

Per completezza nel concludere questa sezione di presentazione del modello inserisco la rappresentazione matematica generale dei modelli a parametro concentrato in termini di DAE (*differential algebraic equation*) rimandando a [2] per una trattazione piú esaustiva.

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \quad \text{con} \quad t \in (0, T] \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0;$$

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0;$$

<sup>14</sup>Il modello a parametro concentrato per il cuore fa intervenire elementi circuitali piú complessi quali il diodo ed i generatori pilotati, si rimanda a [2] per una presentazione esaustiva

dove  $\mathbf{y}$  rappresenta il vettore delle variabili di stato mentre  $\mathbf{z}$  contiene le altre variabili del circuito e  $G$  contiene le relazioni algebriche fra le variabili derivanti dall'applicazione delle leggi di Kirchhoff.

## 2 Il modello di riferimento

A termine di questa introduzione modellistica analizzeremo un caso particolare, che sarà poi oggetto dell'analisi di carattere matematico, esemplificativo di ciò che accade nei casi reali. Consideriamo un vaso di cui siano noti la resistenza  $r$ , l'induttanza  $l$  e la capacità  $c$ . Ammettiamo di poter rappresentare il vaso terminale con un modello 0D (per fissare le idee pensiamo ad un modello che abbia come equivalente elettrico una resistenza in parallelo ad una capacità) e supponiamo di conoscere ad esempio la pressione in ingresso per ogni tempo oltre alle condizioni iniziali relative ad entrambe le variabili incognite.

Allora possiamo riassumere il problema nel modello matematico:  
*trovare la pressione  $p(t, x)$  e la portata del flusso  $q(t, x)$  tali che:*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{r} = 0;$$

con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}; \quad H = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{l} & 0 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ rq \end{bmatrix};$$

e

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad q(x, 0) = q_0(x) \quad p(0, t) = p_H(t)$$

$$q(x_2, t) = C_0 p_t(x_2, t) + \frac{1}{R_0} p(x_2, t)$$

### 3 Analisi del modello linearizzato

#### 3.1 Il problema

Riscriviamo di seguito il problema in esame per maggiore chiarezza:  
*trovare la pressione  $p(t, x)$  e la portata del flusso  $q(t, x)$  tali che:*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{r} = 0; \quad (P1)$$

con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}; \quad H = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{l} & 0 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ rq \end{bmatrix};$$

e

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad q(x, 0) = q_0(x) \quad p(0, t) = p_H(t)$$

$$q(x_2, t) = C_0 p_t(x_2, t) + \frac{1}{R_0} p(x_2, t)$$

Al fine di studiare la buona posizione del problema (ovvero esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati della soluzione) possiamo procedere come segue<sup>15</sup>.

Siano  $T$  e  $\Lambda$  tali che  $\Lambda = THT^{-1}$ :

$$T = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{l}{c}} \\ 1 & -\sqrt{\frac{l}{c}} \end{Bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{cl}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{cl}} \end{Bmatrix}$$

Se a questo punto sostituiamo nell'equazione  $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$  e premoltiplichiamo quest'ultima per  $T$  si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{f} + A\mathbf{u} = 0; \quad (P2)$$

con

$$A = T \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{Bmatrix} T^{-1} = \frac{1}{2} r \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix};$$

e

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ \frac{\Phi}{c} \end{bmatrix};$$

<sup>15</sup>Osservo che la buona posizione non discende immediatamente da quella dei sistemi strettamente iperbolici (per la dimostrazione si veda ad esempio [10]) in quanto in luogo di uno dei due dati al bordo abbiamo una equazione differenziale

Ora, nel caso in cui la resistenza del vaso sia trascurabile ( $r = 0$ ) abbiamo già ottenuto un sistema diagonale e possiamo già ritenersi soddisfatti della precedente riformulazione.

se  $r \neq 0$  invece dobbiamo ancora fare qualche passaggio; definendo  $\mu = e^{At}\mathbf{u}$  dove  $e^{At}$  è l'esponenziale di matrice<sup>16</sup>:

$$e^{At} = 0.5 \begin{Bmatrix} e^{rt} + 1 & 1 - e^{rt} \\ 1 - e^{rt} & e^{rt} + 1 \end{Bmatrix};$$

Arriviamo infine al sistema strettamente iperbolico:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + B(t) \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mathbf{g}; \quad (P3)$$

con  $\mathbf{g} = e^{At}\mathbf{f}$  e:

$$B(t) = e^{At} \Lambda e^{-At} = \frac{1}{2\sqrt{lc}} \begin{Bmatrix} e^{2rt} + e^{rt} & e^{rt} - e^{-rt} \\ -e^{rt} & -e^{rt} - e^{-rt} \end{Bmatrix};$$

Si noti che  $B$  non è diagonale.

## 4 Buona posizione del problema

Limitiamoci allo studio della buona posizione nel caso di  $r = 0$ <sup>17</sup>.

Allo scopo di dare un'appropriata nozione di dipendenza continua dai dati della soluzione dobbiamo ricordare due importanti stime a priori<sup>18</sup>: la prima per problemi iperbolici lineari, la seconda per ODE.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t + au_x + a_0 u = f & x \in (\alpha, \beta) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in (\alpha, \beta) \\ u(\alpha, t) = \phi(t) \end{cases}$$

Ipotizziamo che  $a(x)$  sia positiva e limitata e che  $a_0 - \frac{1}{2}a_x \geq 0$ , definiamo:

$$\|v\|_a = \left( \int_{\alpha}^{\beta} a^{-1}(x) v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Applicando il lemma di Gronwall<sup>19</sup> si ottiene la stima a priori:

$$\|u(t)\|_a^2 + \int_0^t u^2(\beta, s) ds \leq e^t \left( \|u_0\|_a^2 + \int_0^t \phi^2(s) ds + \int_0^t \|f(s)\|_a^2 ds \right) \quad (11)$$

<sup>16</sup>rimandando a [12] per maggiori dettagli qui ricordiamo solamente che se  $A$  è diagonalizzabile ( $A = S \text{diag}(\lambda_j) S^{-1}$ ), allora  $e^{At} = S \text{diag}(e^{\lambda_j t}) S^{-1}$  ed inoltre  $A e^{At} = e^{At} A$

<sup>17</sup>Il caso  $r \neq 0$  sarà ripreso in seguito ma solamente da un punto di vista numerico

<sup>18</sup>In effetti non ha senso parlare di dipendenza continua dai dati se non si precisa rispetto a quale norma

<sup>19</sup>Si veda [11] per i dettagli

Consideriamo adesso i seguenti due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) & t \in (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t, z) + \delta(t) & t \in (0, T) \\ z(0) = y_0 + \delta(0) \end{cases}$$

Supponendo che  $f$  sia continua e lipschitziana rispetto al secondo argomento, uniformemente rispetto al primo<sup>20</sup> allora vale la stima (con  $\|*\|_\infty$  si intende la norma del massimo):

$$\|y - z\|_\infty \leq \frac{e^{LT} - 1}{L} \|\delta(t)\|_\infty + e^{LT} |\delta_0| \quad (12)$$

Essendo il dominio che considereremo limitato possiamo pensare di provare una dipendenza continua dai dati nel senso di  $L^2$ . Ipotizziamo dunque  $r = 0$  e riscriviamo il problema nella forma equivalente ( $\mathbf{u} = [w, \xi]$ ):

$$\begin{cases} w_t + \frac{1}{\sqrt{tc}} w_x = -\frac{1}{2c} \Phi \\ w(x, 0) = w_0(x) & w(0, t) = \tilde{w}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_t - \frac{1}{\sqrt{tc}} \xi_x = -\frac{1}{2c} \Phi \\ \xi(x, 0) = \xi_0(x) & \xi(L, t) = \xi_{0D}(t) \end{cases}$$

Se riusciamo a trovare i dati mancanti (ovvero  $\xi_{0D}(t)$  e  $\tilde{w}(t)$ ) abbiamo concluso grazie alla già citata buona posizione del problema iperbolico. Un'idea per procedere, che sarà chiarita a breve, è la seguente:

1. a partire da  $\xi(0, t)$  otteniamo  $\tilde{w}$ , per farlo non avremo bisogno di dati ulteriori (si veda la (17))
2. calcoliamo  $w$  in tutto  $(0, L) \times (0, T)$  grazie alla conoscenza di  $\tilde{w}$ , l'ultimo dei dati necessari (si veda la (16))
3. ricaviamo  $\xi_{0D}$  risolvendo l'equazione differenziale del modello 0D (15).
4. calcoliamo  $\xi$

Dopo questa dichiarazione di intenti cominciamo a svolgere qualche calcolo. Per prima cosa tenendo presente che:

$$\begin{cases} w(x, t) = \frac{1}{2} (p(x, t) + \sqrt{\frac{c}{l}} q(x, t)) \\ \xi(x, t) = \frac{1}{2} (p(x, t) - \sqrt{\frac{c}{l}} q(x, t)) \end{cases} \quad (13)$$

ed invertendo:

$$\begin{cases} p(x, t) = w(x, t) + \xi(x, t) \\ q(x, t) = \sqrt{\frac{c}{l}} (w(x, t) - \xi(x, t)) \end{cases} \quad (14)$$

<sup>20</sup>Si dice che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è lipschitziana se esiste  $L > 0$  tale che  $\forall y_1, y_2$  in  $\mathbb{R}$ :

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

possiamo così riscrivere l'equazione del modello 0D:

$$C_0 \dot{\xi}_{0D} + \left( \frac{1}{R_0} + \sqrt{\frac{c}{l}} \right) \xi_{0D} = C_0 \dot{w}_{0D} + \left( \frac{1}{R_0} - \sqrt{\frac{c}{l}} \right) w_{0D} \quad (15)$$

Per trovare  $\tilde{w}$  ricordo dalla teoria l'espressione di  $w$  ( $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ )<sup>21</sup>:

$$w(x, t) = \begin{cases} w_0(x - vt) - \int_0^t \frac{1}{2c} \Phi(x - v(t - s), s) ds & x - vt \in (0, L) \\ \tilde{w}_0\left(\frac{x}{v} - t\right) - \int_0^x \frac{1}{2c} \Phi\left(y, \frac{x+y}{v} - t\right) dy & x - vt \notin (0, L) \end{cases} \quad (16)$$

Quindi nella regione  $\{(x, t) : x - vt \in (0, L)\}$  conosciamo già la nostra soluzione. Osservando che:

$$w(0, t) = p_H(t) - \xi(0, t) \quad (17)$$

per trovare  $\xi(0, t)$  e dunque  $\tilde{w}$  dobbiamo integrare lungo le caratteristiche di  $\xi$  partenti da  $t = 0$ . Siccome  $w$  non entra nel termine esogeno di  $\xi$  siamo immediatamente in grado grazie alla conoscenza di  $\xi_0$  di determinare  $\xi(0, t)$  attraverso la nota formula:

$$\xi(0, t) = \xi_0(vt) - \int_0^t \frac{1}{2c} \Phi(v(t - s), s) ds \quad (18)$$

Calcolato  $\tilde{w}$  e dunque  $w$  in  $(0, L) \times (0, T)$ , possiamo procedere risolvendo l'equazione del modello 0D ed infine la legge di conservazione per  $\xi$ . Siccome entrambi questi problemi ammettono una ed una sola soluzione, allora la soluzione del problema di partenza esiste ed è unica.

La dimostrazione della dipendenza continua dai dati è piú complessa. Possiamo immediatamente provare la tesi per  $w$  grazie alla stima (11) ed al fatto che per l'integrale è possibile provare una stima in  $L^2$  (ricordo che  $(a + b + c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 2c^2$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{w}^2(s) ds &= \int_0^t \left( p_H(s) - \xi_0(vs) + \int_0^s \frac{1}{2c} \Phi(v(s - p), p) dp \right)^2 ds \\ &\leq 4 \int_0^t (p_H(s))^2 ds + 4 \int_0^t (\xi_0(vs))^2 ds + 2 \int_0^t \left( \int_0^s \frac{1}{2c} \Phi(v(s - p), p) dp \right)^2 ds \end{aligned}$$

Possiamo dunque concludere che:

**Lemma 1.** *Considerato il problema (P2) e posto  $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$  vale la stima :*

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_v^2 + \int_0^t w^2(x_2, s) ds &\leq e^t \left( \|w_0\|_v^2 + 4 \int_0^t p_H^2(s) ds + 4 \int_0^t \xi_0^2(vs) ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^t \left( \int_0^s \frac{1}{2c} \Phi(v(s - p), p) dp \right)^2 ds + \int_0^t \left\| \frac{1}{2c} \Phi(s) \right\|_v^2 ds \right) \end{aligned}$$

<sup>21</sup>per maggiori dettagli si veda ancora [10]

Resta da provare che anche  $\xi$  dipende con continuità dai dati. Ricordando ancora la stima (11) basterá dimostrare che  $\xi_{0D}$  risulta essere stimata da  $w_{0D}$  che abbiamo provato essere dipendente con continuità dai dati.

Una possibile strategia é la seguente. Sia  $y = \xi_{0D} + w_{0D}$  allora il modello 0D diventa:

$$q = C_0 \dot{p} + \frac{1}{R_0} p \longrightarrow \sqrt{\frac{c}{l}}(w - \xi) = C_0 \dot{y} + \frac{1}{R_0} y$$

moltiplicando per  $y$ :

$$C_0 y \dot{y} + \frac{1}{R_0} y^2 = \sqrt{\frac{c}{l}}(w - \xi)y$$

ed integrando fra 0 e  $t$  ( $\frac{d}{dt}y^2 = 2y\dot{y}$ ):

$$\frac{1}{2}C_0 y^2(t) + \frac{1}{R_0} \int_0^t y^2(s) ds = \frac{1}{2}C_0 y^2(0) + \sqrt{\frac{c}{l}} \int_0^t (w - \xi)y ds$$

Dato che  $(w - \xi)y = (2w - y)y = -y^2 + 2wy$  si trova:

$$\frac{1}{2}C_0 y^2(t) + \frac{1}{R_0} \int_0^t y^2(s) ds \leq \frac{1}{2}C_0 y^2(0) + 2\sqrt{\frac{c}{l}} \int_0^t wy ds$$

e se applichiamo all'ultimo integrale di destra la disuguaglianza di Young<sup>22</sup> possiamo riscrivere:

$$\frac{1}{2}C_0 y^2(t) + \frac{1}{R_0} \int_0^t y^2(s) ds \leq \frac{1}{2}C_0 y^2(0) + \sqrt{\frac{c}{l}} \left( \epsilon \int_0^t w^2 ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t y^2 ds \right)$$

a questo punto scegliendo  $\epsilon = R_0 \sqrt{\frac{c}{l}}$ :

$$\frac{1}{2}C_0 y^2(t) + \frac{1}{2R_0} \int_0^t y^2(s) ds \leq \frac{1}{2}C_0 y^2(0) + R_0 \frac{c}{l} \int_0^t w^2(s) ds$$

Ma allora abbiamo provato che  $y(t)$  dipende con continuità da  $w_{0D}$  nel senso di  $L^2$ . Dalla banale catena di disuguaglianze:

$$|\xi| = |y - w| \leq |y| + |w|$$

si ottiene il seguente lemma.

**Lemma 2.** Considerato il problema (P2) e posto  $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$  vale la stima :

$$\int_0^t \xi_{0D}(s) ds \leq R_0 C_0 (2\xi_{0D}(0) + w_{0D}(0))^2 + \left(1 + 2\frac{c}{l}R_0^2\right) \int_0^t w_{0D}(s) ds$$

<sup>22</sup>

$$\forall \epsilon > 0 \quad 2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$$

*Osservazione* In alternativa avremmo potuto seguire anche un'altra strada. Ricordiamo dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie che l'integrale generale di:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

é:

$$e^{\int a(x) dx} \left( \int b(x)e^{-\int a(x) dx} dx + costante \right)$$

troviamo integrando per parti:

$$\xi_{0D}(t) = C_0 w_{0D}(t) - e^{-at} \left( \int_0^t e^{as} (aC_0 + b) w_{0D}(s) ds + M \right)$$

dove  $a = \frac{1}{R_0} + \sqrt{\frac{c}{l}}$  e  $b = \frac{1}{R_0} - \sqrt{\frac{c}{l}}$  ed  $M$  può essere ricavata a partire dalle condizioni iniziali.

A partire dalla formula precedente possiamo trovare immediatamente una stima in  $L^2$ , la quale tuttavia risulta più lasca e meno interessante della precedente.

In virtù di tutte le considerazioni precedenti perveniamo al seguente importante risultato.

**Teorema 1.** *Il problema (P1) ammette un'unica soluzione che dipende con continuità dai dati, ovvero é ben posto.*

Prima di concludere facciamo un'importante osservazione. La dipendenza continua poteva essere provata anche nella norma del massimo. Ciò sarà molto importante nel seguito in quanto ai fini dell'applicazione di metodi alle differenze finite sarà importante disporre di stime in norma infinito (mentre le stime in norme integrali sono importanti nel caso dei metodi agli elementi finiti).

Benché una dimostrazione rigorosa della dipendenza continua in  $L^\infty$  non sarà inserita, enunciamo comunque un'importante stima che insieme a (12) costituisce le basi di tale risultato.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t + au_x = f & x \in \mathbb{R} \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = h(t) & t \in (0, T) \end{cases}$$

allora con ovvie notazioni vale la seguente:

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \max(\|g_1 - g_2\|_\infty, \|h_1 - h_2\|_\infty) + T \int_0^T |f_1(x - a(t-s), s) - f_2(x - a(t-s), s)| ds \quad (I) \quad (19)$$

## 4.1 Un metodo numerico

La discussione precedente *de facto* propone un metodo numerico che vale la pena di esplicitare.

Supponiamo di disporre di tre metodi rispettivamente per trattare le leggi di conservazione del problema (P2), l'ODE (15) e la risoluzione dell'integrale (18) e consideriamo il metodo che consiste nell'applicazione in sequenza dei precedenti in cui approssimiamo la derivata di  $w$  (da inserire nella ODE) con un determinato rapporto incrementale (Eulero centrato ad esempio). E' auspicabile che le proprietà dei singoli schemi si trasferiscano al metodo generale. In particolare vorremmo provare che:

*Dati tre schemi convergenti per i tre sottoproblemi allora il metodo globale converge.*

Questo risultato in realtà é falso: infatti data un'approssimazione convergente di  $w$  non é assolutamente detto che il rapporto incrementale centrato converga a  $\dot{w}$ <sup>23</sup>. Tuttavia se la nostra soluzione numerica converge con un ordine  $d > 1$ , allora:

$$\frac{\hat{w}(t^{j+1}) - \hat{w}(t^{j-1})}{2\Delta t} = \frac{w(t^{j+1}) - w(t^{j-1}) + O(\Delta t)^d}{2\Delta t} = \dot{w}(t^j) + O(\Delta t)^{d-1}$$

Possiamo dunque dimostrare un risultato che benché piú debole di quello inizialmente auspicato delinea comunque una strada percorribile.

**Teorema 2.** *Consideriamo un metodo numerico, che approssimi la soluzione del problema (P1), consistente della sequenza di tre metodi convergenti rispettivamente per l'integrale (18), per le leggi di conservazione di (P2) e per l'ODE (15) rispetto alla norma  $\|*\|_\infty$ . Supponiamo inoltre che l'ordine di convergenza dei primi due metodi sia maggiore di 1 e che  $\dot{w}_{0D}$  sia approssimata mediante rapporto incrementale centrato<sup>24</sup>. Allora la soluzione numerica del metodo converge alla soluzione di (P1) rispetto alla norma  $\|*\|_\infty$ .*

*Dimostrazione.* Per maggiore chiarezza é opportuno precisare fin da subito le notazioni.

Con  $\tilde{w}$ ,  $w$ ,  $\xi_{0D}$  e  $\xi$  indichiamo le soluzioni di (P1), mentre con  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{\xi}_{0D}$  e  $\bar{\xi}$  le approssimazioni numeriche. Infine con  $\tilde{w}^*$ ,  $w^*$ ,  $\xi_{0D}^*$  e  $\xi^*$  indichiamo le soluzioni analitiche dei problemi perturbati, che si ottengono considerando come dati al bordo i dati numerici<sup>25</sup>. Chiamiamo  $r$ ,  $l$ ,  $m$  gli ordini di convergenza dei sottometodi rispettivamente per l'integrale, la legge di conservazione e l'ODE e definiamo  $d = \min(r, l)$ .

Utilizzando la disuguaglianza triangolare e la (19) si ottiene:

$$\begin{aligned} \|w - \bar{w}\|_\infty &\leq \|w^* - \bar{w}\|_\infty + \|w - w^*\|_\infty \\ &\leq \|w^* - \bar{w}\|_\infty + \|\tilde{w} - \bar{\tilde{w}}\|_\infty \quad (I) \end{aligned}$$

<sup>23</sup>é facile trovare un controesempio partendo da una successione di funzioni convergente la cui derivata non converge alla derivata della funzione limite ( $f_n = \frac{1}{n} \sin(nx)$ ) e restringendola ai nodi della partizione

<sup>24</sup>L'utilizzo di Eulero centrato sará possibile solamente nel caso lo schema per la ODE (15) sia esplicito (altrimenti si dovrá usare Eulero esplicito).

<sup>25</sup>l'affermazione precedente é parzialmente imprecisa perché se le soluzioni numeriche sono definite per punti, d'altra parte i problemi richiedono soluzioni continue. Si può risolvere il problema definendo una spline interpolante lineare a tratti

Osserviamo che se i due sottometodi producono soluzioni convergenti con ordine  $d > 1$  allora anche  $\bar{w}$  sar  convergente con tale ordine e quindi il rapporto incrementale  $d_j(\bar{w}) = \frac{\bar{w}(t^{j+1}) - \bar{w}(t^{j-1})}{2\Delta t}$  converger  alla derivata di  $w$ .

Allo stesso modo possiamo combinare la dipendenza continua del problema 0D (si veda (12)) e della legge di conservazione (ancora (19)) con la convergenza degli schemi numerici alle soluzioni dei sottoproblemi per pervenire alla tesi.

Concludiamo precisando l'ordine di convergenza:  $\bar{w}$  converge con ordine  $d = \min(r, l)$  come attesta la stima (I), mentre  $\bar{\xi}$  con ordine  $\min(d - 1, m)$  come ci si pu  convincere con un ragionamento analogo.  $\square$

Completata la definizione   necessario chiedersi se questo metodo sia interessante al fine di trattare problemi pi  complessi di questo problema modello. Naturalmente non pu  essere di impedimento il fatto che sia necessario uno schema di ordine 2 in tempo per la legge di conservazione in quanto disponiamo del metodo di *Lax Wendroff*, inoltre il calcolo di un integrale   generalmente molto pi  agevole da trattare rispetto ad un problema differenziale.

Le motivazioni che ci portano ad abbandonare questo metodo si possono sintetizzare nei seguenti due punti:

- Il metodo proposto   strettamente legato alla linearit  del problema. Ci  comporta che non ammette una estensione al caso non lineare <sup>26</sup>. Inoltre anche nel caso lineare (il caso  $r \neq 0$  costituisce un primo esempio) non sempre   possibile ridurre il modello ad una sequenza di passi.
- Nella pratica ingegneristica spesso ci si trova ad avere codici diversi che risolvono problemi diversi ed   importante essere di grado di usarli insieme per risolvere il problema accoppiato.

Queste ragioni ci impongono di trovare un altro metodo radicalmente diverso da questo.

## 4.2 Un altro metodo

Come gi  detto prima cambiamo decisamente prospettiva. Per fissare le idee consideriamo un metodo esplicito sia per il modello 1D che per lo 0D ad esempio upwind ed Eulero esplicito rispettivamente.

Per semplicit  di notazione da adesso siano  $v = \frac{1}{\sqrt{tc}}$  ed  $f = -\frac{1}{2c}\Phi$ . Inoltre poniamo ancora una volta  $r = 0$ . Siano inoltre  $t^n = n\tau$  e  $x_j = jh$  dove  $h$  e  $\tau$  sono i passi spaziale e temporale della griglia. Indicheremo infine con  $\mathbf{w}^k$  il vettore  $(w_0^k, \dots, w_{N_h}^k)$

Con queste notazioni il metodo DF-upwind per  $w$  si scrive:

$$w_t + vw_x = f \implies w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + f_j^n \tau$$

<sup>26</sup>Il modello linearizzato rappresenta una semplificazione non sempre accettabile del modello non lineare presentato nella prima sezione, pertanto bench  in questo lavoro non si sconfini mai nell'analisi del caso pi  generale   naturale che si privilegi ragionamenti a questo estendibili

Analogamente per  $\xi$ :

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \tau f_j^n$$

Ammettiamo di conoscere  $w$  e  $\xi$  fino al passo  $n$ ; risulta chiaro che per poter andare avanti nelle iterazioni manchino solamente  $w_0^{n+1}$  e  $\xi_{N_h}^{n+1}$  ovvero i dati usualmente assegnati dalle condizioni al bordo.

Nel nostro problema i dati al bordo sono da un lato la pressione e dall'altro una relazione differenziale fra pressione e flusso. Risulta dunque naturale passare per le variabili fisiche per ottenere le informazioni necessarie sulle variabili caratteristiche.

Ricordando le (13) e (14) possiamo risolvere il problema della ricerca di  $w_0^{n+1}$  e  $\xi_{N_h}^{n+1}$  calcolando  $\xi_0^{n+1}$  e  $w_{N_h}^{n+1}$ . In effetti valgono le relazioni:

$$\xi = p - w \quad w = p - \xi$$

Per ricavare  $\xi_0^{n+1}$  ricorriamo ad un procedimento di estrapolazione (una strategia tipica dei metodi DF in outflow). Dalla teoria é noto che:

$$\xi(0, t^{n+1}) = \xi(v\tau, t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(v(t^{n+1} - s), s) ds$$

Ora, dal momento che la retta per  $(0, \xi_0^n)$  e  $(h, \xi_1^n)$  é  $r(x) = \xi_0^n + \left(\frac{\xi_1^n - \xi_0^n}{h}\right)x$ , si ha che:

$$\xi(v\tau, t^n) \simeq \xi_0^n + (\xi_1^n - \xi_0^n)v\lambda = \xi^{*,n}$$

quindi se stimiamo l'integrale con  $\tau f(v\tau, t^n)$ <sup>27</sup> avremo, a meno di un errore di troncamento di ordine 2 in spazio ed 1 in tempo :

$$\xi(0, t^{n+1}) \simeq \xi^{*,n} + \tau f(v\tau, t^n)$$

Siamo a questo punto in grado di calcolare  $\xi_{N_h}^{n+1}$ . Infatti  $w_{N_h}^{n+1}$  é a questo punto noto (a patto di risolvere prima l'altra equazione), mentre grazie al modello 0D, in questo caso discretizzato tramite Eulero in avanti:

$$p_{0D}^{n+1} = p_{0D}^n + \frac{\tau}{C_0} \left[ q_{0D}^n - \frac{1}{R_0} p_{0D}^n \right]$$

$p(L, t^{n+1})$  é anch'esso disponibile<sup>28</sup>.

Vale la pena di schematizzare la routine che poi sará implementata.

<sup>27</sup>Naturalmente l'approssimazione mediante punto medio sarebbe piú precisa, tuttavia globalmente non avremmo un guadagno in ordine (peserebbe comunque l'errore dato dall'interpolazione lineare) e d'altra parte dovremmo calcolare  $f(v\frac{\tau}{2}, t^n + \frac{\tau}{2})$

<sup>28</sup>Nel caso si fosse voluto usare Eulero implicito avremmo dovuto seguire il procedimento di estrapolazione visto nell'altro caso, ma anche in quel caso avremmo a questo punto dell'algoritmo potuto disporre di  $p(L, t^{n+1})$ , naturalmente avremmo dovuto modificare lo schema per lo 0D

*Metodo upwind-Eulero esplicito*

Per  $n \geq 0$  ( $\xi^{*,n} = \xi_0^n + v\lambda(\xi_1^n - \xi_0^n)$ ):

1.

$$\xi^{\tilde{n}+1} = \xi^{*,n} + \tau f(v\tau, t^n)$$

2.

$$w_0^{n+1} = p_H^{n+1} - \tilde{\xi}_0^{n+1}$$

3.

$$w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + f_j^n \tau \quad \text{per } j = 1, \dots, N_h$$

4.

$$p_{0D}^{n+1} = p_{0D}^n + \frac{\tau}{C_0} \left[ q_{0D}^n - \frac{1}{R_0} p_{0D}^n \right]$$

5.

$$\xi_{N_h}^{n+1} = p_{0D}^{n+1} - w_{N_h}^{n+1}$$

6.

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \tau f_j^n \quad \text{per } j = N_h - 1, \dots, 0$$

*Osservazione* Precisiamo che nella routine si calcola due volte per ogni iterazione  $\xi_0^{n+1}$ . Avendo usato come schema per il modello 1D *upwind* i due valori coincidono a meno del contributo di  $f$ .

Consideriamo adesso il caso  $r \neq 0$ . Guardando all'equazione (P2) possiamo immediatamente generalizzare la routine (ancora una volta si é scelto un accoppiamento in esplicito):

*Metodo upwind-Eulero esplicito (generale)*

Per  $n \geq 0$ :

1.

$$\xi_0^{n+1} = \xi^{*,n} + \tau \left( f(v\tau, t^n) + \frac{1}{2} r (w^{*,n} - \xi^{*,n}) \right)$$

2.

$$w_0^{n+1} = p_H^{n+1} - \xi_0^{n+1}$$

3.

$$w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + \tau \left( f_j^n - \frac{1}{2}r(w_j^n - \xi_j^n) \right) \quad \text{per } j = 1, \dots, N_h$$

4.

$$p_{0D}^{n+1} = p_{0D}^n + \frac{\tau}{C_0} \left[ q_{0D}^n - \frac{1}{R_0} p_{0D}^n \right]$$

5.

$$\xi_{N_h}^{n+1} = p_{0D}^{n+1} - w_{N_h}^{n+1}$$

6.

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \tau \left( f_j^n + \frac{1}{2}r(w_j^n - \xi_j^n) \right) \quad \text{per } j = N_h - 1, \dots, 0$$

### 4.3 Analisi del metodo

Una volta definito, dobbiamo studiare le proprietà del metodo ovvero consistenza, stabilità e convergenza.

Reputiamo opportuno ricordare una definizione generale di consistenza e stabilità per un metodo numerico in modo che a posteriori potremmo valutare se le stime a cui saremmo pervenuti siano davvero stime di stabilità. Eviteremo di dare definizioni *ad hoc* per il problema modello in esame in quanto di scarso interesse applicativo.

Sia dato il problema  $F(x, d) = 0$  (dove  $d$  rappresenta l'insieme dei dati e  $x$  la soluzione); consideriamo la successione  $F_n(x_n, d_n) = 0$  per  $n \geq 0$ .

Diciamo che il metodo è consistente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, d) - F(x, d) = 0$ , mentre il metodo si dice stabile se  $x_n$  dipende con continuità dai dati ossia definita un'opportuna norma:

$$\begin{aligned} \forall d_n \exists \eta_0 = \eta_0(d_n) > 0 \exists K_0 = K_0(\eta_0) \text{ tale che} \\ \forall \delta d_n : \|\delta d_n\| \leq \eta_0 \implies \|x_n\| \leq K_0 \|\delta d_n\| \end{aligned} \quad (20)$$

Infine il metodo si dice convergente rispetto alla norma  $\|*\|$  se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Per quanto concerne la consistenza, questa discende banalmente dal fatto che ad ogni singolo passo sono utilizzati metodi consistenti (omettiamo i dettagli e rimandiamo a [11] per la dimostrazione della consistenza per *upwind*).

Nella discussione sulla stabilità partiremo da un caso più semplice per poi andare ad analizzare quello più generale.

Assumiamo che  $r = 0$  e consideriamo la situazione ideale nella quale l'arteria coincide con la semiretta positiva ( $x > 0$ ).

Il sistema di partenza è allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + H \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

e diagonalizzando si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

con

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{lc}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{lc}} \end{array} \right\};$$

e  $w$  e  $\xi$  definite dalle (13).

Consideriamo il metodo upwind applicato al sistema diagonale:

$$w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) \quad \text{per } j = 1, \dots, N_h$$

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) \quad \text{per } j = N_h - 1, \dots, 0$$

e consideriamo una legge che assegni la caratteristica *inflow*  $w_0^{n+1}$  in  $x = 0$  sulla base di un sistema esterno, il cui modello puó essere ad esempio:

$$w_0^{n+1} = g(t^{n+1}, \xi_0^{n+1})$$

Allora si ha che:

1. Sotto la CFL<sup>29</sup>  $\frac{\lambda}{\sqrt{cl}} < 1$  si ha:

$$\|\xi^n\|_\infty \leq \|\xi^0\|_\infty \quad (21)$$

2. Sempre sotto CFL:

$$|w_j^{n+1}| \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{cl}}\right) |w_j^n| + \left|\frac{\lambda}{\sqrt{cl}} w_{j-1}^n\right| \quad \text{per } j = 1, \dots, \infty$$

e quindi:

$$|w_j^{n+1}| \leq \|\mathbf{w}^n\|_\infty \text{ se } j = 1, \dots, \infty \quad (22)$$

mentre aggiungendo l'ipotesi di sublinearitá di  $g$ :  $|g(t, x)| \leq K_t |x|$ :

$$|w_0^{n+1}| \leq K_n \|\xi^0\|_\infty \Rightarrow (K = \|K_n\|_\infty) \quad |w_0^n| \leq K \|\xi^0\|_\infty \quad (23)$$

Siamo arrivati dunque ad un primo risultato di stabilitá che da un lato é molto semplice, ma dall'altro é troppo debole in quanto il nostro obiettivo é accoppiare il modello 1D con un sistema dinamico.

Consideriamo allora un modello che abbia come equivalente circuitale una resistenza  $R_c$  in parallelo ad una capacitá  $C$ . In questo modo il sistema dinamico da trattare sará:

$$q_{0D} = -C\dot{p}_{0D} - \frac{1}{R_c} p_{0D}$$

Continueranno a valere le (21) e (22), dunque dobbiamo solamente ridefinire la stima per  $w_0^n$ .

<sup>29</sup>Il metodo upwind risulta stabile sotto tale condizione; per maggiori dettagli si veda [11]

Dobbiamo cioè come prima verificare le condizioni di stabilità dell'accoppiamento fra modelli 0D e 1D. Per fare questo consideriamo il seguente metodo:

$$C \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + \frac{1}{R_c} p^n = -q^{n_*}$$

dove con  $n_*$  si intenderá prima  $n$  e poi  $n+1$ : nel primo caso dunque si ritrova il metodo di Eulero esplicito adottato anche nella routine della precedente sezione, mentre nel secondo definiamo un metodo ibrido che, essendo parzialmente implicito, ci aspettiamo essere maggiormente stabile.

Cominciamo con lo studio della stabilità del secondo metodo. Ponendo  $\tau_c = CR_c$  si ha:

$$p^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right) p^n - \frac{\tau}{C} q^{n+1}$$

riesprimendo la precedente equazione in variabili caratteristiche (si ricordi (14)) e definendo  $K = \sqrt{\frac{\varepsilon}{I}} \frac{1}{C}$  si ottiene:

$$(1 + \tau K) w_0^{n+1} = (-1 + \tau K) \xi_0^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right) \xi_0^n + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right) w_0^n$$

infine, ricordando la (21):

$$\begin{aligned} |w_0^{n+1}| &\leq \left| \frac{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}{1 + \tau K} \right| |w_0^n| + \frac{|\tau K - 1| + \left|1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right|}{1 + \tau K} \|\xi^0\|_\infty \\ &= \alpha |w_0^n| + M \end{aligned} \quad (24)$$

dove si é posto  $\alpha = \left| \frac{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}{1 + \tau K} \right|$  ed  $M = \frac{|\tau K - 1| + \left|1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right|}{1 + \tau K} \|\xi^0\|_\infty$ . Osserviamo che sotto la condizione  $\alpha < 1$   $M \leq 2\|\xi^0\|_\infty$ .

Risolvendo la disequazione alle differenze (24) si ottiene la stima:

$$\begin{aligned} |w_0^n| &\leq \alpha |w_0^{n-1}| + M \\ &\leq \alpha^n |w_0^0| + M \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^m \end{aligned}$$

che sotto la condizione  $\alpha < 1$  rappresenta la stima di stabilità voluta (che sostituisce la (23)):

$$|w_0^n| \leq \alpha^n |w_0^0| + M \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \quad (25)$$

La condizione  $\alpha < 1$  può essere riespressa in modo più esplicativo (si ipotizza  $1 - K\tau_c > 0$  altrimenti la condizione vale  $\forall \tau$ ):

$$\tau < \frac{2\tau_c}{1 - K\tau_c} \quad (S)$$

Abbiamo così trovato una condizione di stabilità, facciamo alcuni commenti:

- Il passo di tempo deve essere inferiore ad una quantità proporzionale al tempo di risposta  $\tau_c$  del modello 0D. Ciò é interpretabile (al pari della CFL) come una condizione che impone che la " reattività " dello schema numerico debba superare quella del circuito che discretizza
- É ragionevole che (S) non dipenda da  $\lambda = \frac{\tau}{h}$  in quanto il passo spaziale non gioca alcun ruolo nell'accoppiamento fra i due modelli.

Ponendo adesso  $n_* = n$  con calcoli analoghi si trova:

$$w_0^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \left(1 + R_c \sqrt{\frac{c}{l}}\right)\right) w_0^n + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \left(1 - R_c \sqrt{\frac{c}{l}}\right)\right) \xi_0^n - \xi_0^{n+1}$$

da cui definiti:

$$\tilde{\alpha} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \left(1 + R_c \sqrt{\frac{c}{l}}\right)\right)$$

$$\tilde{M} = \left(1 + \left|1 - \frac{\tau}{\tau_c} \left(1 - R_c \sqrt{\frac{c}{l}}\right)\right|\right) \|\xi^0\|_\infty$$

si ottiene la seguente stima di stabilit :

$$|w_0^n| \leq \tilde{\alpha}^n |w_0^0| + \tilde{M} \frac{1 - \tilde{\alpha}^n}{1 - \tilde{\alpha}} \quad (26)$$

da cui si desume la seguente condizione di stabilit :

$$\tau < \frac{2}{1 + R_c \sqrt{\frac{c}{l}}} \tau_c \quad (S')$$

Osserviamo coerentemente che per  $\tau_c$  piccolo ( $S'$ ) risulta pi  stringente di (S), inoltre se vale ( $S'$ ) cio  se  $\alpha < 1$ ,  $\tilde{M} < 2\|\xi^0\|_\infty$ .

*Precisazione*

Si potrebbe obiettare che le stime (25) e (26) siano non del tutto esaustive in quanto riguardano solamente  $w_0^n$ ; infatti (ipotizziamo  $n_* = n + 1$ ) abbiamo provato che:

$$\begin{cases} |w_j^{n+1}| \leq \|\mathbf{w}^n\|_\infty \text{ se } j = 1, \dots, \infty \\ |w_0^n| \leq \alpha^n |w_0^0| + L \|\xi^0\|_\infty \\ \|\xi^n\|_\infty \leq \|\xi^0\|_\infty \end{cases}$$

con

$$L = \frac{|\tau K - 1| + \left|1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right|}{1 + \tau K} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^{n+1}\|_\infty &\leq \max(\|\mathbf{w}^n\|_\infty, L\|\xi^0\|_\infty + \alpha^{n+1}\|\mathbf{w}^0\|_\infty) \\ &\leq \max(\|\mathbf{w}^{n-1}\|_\infty, L\|\xi^0\|_\infty + \alpha^n\|\mathbf{w}^0\|_\infty, L\|\xi^0\|_\infty + \alpha^{n+1}\|\mathbf{w}^0\|_\infty) \end{aligned}$$

(essendo  $0 < \alpha < 1$ )  $\leq L\|\xi^0\|_\infty + \|\mathbf{w}^0\|_\infty$

Prima di passare al caso  $r \neq 0$  dobbiamo parlare della convergenza del metodo. Dato che le stime (25) e (26) sono in accordo con (20) ci aspettiamo che il metodo converga nella norma del massimo.

Tale supposizione é ragionevole in quanto se le condizioni di stabilit  e consistenza sono corrette allora vale il teorema di equivalenza<sup>30</sup>, tuttavia dovremmo provarlo.

In questo lavoro non affronteremo tale dimostrazione limitandoci alla verifica sperimentale.

#### 4.4 Il caso $r \neq 0$

Cerchiamo di trovare una stima di stabilit  nel caso in cui la resistenza del vaso non sia trascurabile.

Siccome la matrice  $T$  di trasformazione non cambia, continuano ad essere valide le (25) e (26) mentre le stime relative allo schema *upwind* irrimediabilmente cambiano.

Dobbiamo dunque rivedere le (21) e (22) e per farlo consideriamo l'approssimazione del seguente problema su tutta la retta reale:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{f} + A\mathbf{u} = 0 & x \in \mathbb{R} \ t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases} \quad (27)$$

Applicando lo schema si trova:

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) - \frac{r\tau}{2}(w_j^n - \xi_j^n) \\ \xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \frac{r\tau}{2}(w_j^n - \xi_j^n) \end{cases}$$

imponendo la CFL si trova immediatamente che:

$$\begin{cases} w_j^{n+1} \leq \|\mathbf{w}^n\|_\infty + r\tau\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \\ \xi_j^{n+1} \leq \|\xi^n\|_\infty + r\tau\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \end{cases}$$

dove  $\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty := \max(\|\mathbf{w}^n\|_\infty, \|\xi^n\|_\infty)$  Combinando le due equazioni si trova:

$$\|(\mathbf{w}^{n+1}, \xi^{n+1})\|_\infty \leq (1 + r\tau)\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty$$

e ricordando che  $1 + x \leq e^x$ :

$$\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \leq e^{rT}\|(\mathbf{w}^0, \xi^0)\|_\infty \quad (28)$$

A questo punto unendo le (25) e (28) si ottiene una stima di stabilit  valida sotto le medesime condizioni del caso  $r = 0$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{w}^{n+1}, \xi^{n+1})\|_\infty &\leq \max((1 + r\tau)\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty, L\|\xi^0\|_\infty + \alpha^n\|\mathbf{w}^0\|_\infty) \\ &= e^{rT} \max(1, L)\|(\mathbf{w}^0, \xi^0)\|_\infty \end{aligned}$$

<sup>30</sup>Un metodo consistente converge se e solo se é stabile

Dobbiamo osservare come la stima precedente diventi estremamente lasca nel momento in cui  $r$  é grande. Nella sezione numerica verificheremo questa osservazione.

Ciò ci fa pensare che potrebbe essere ragionevole utilizzare un metodo implicito. Vediamo di motivare questa intuizione. Consideriamo per l'approssimazione del problema (27) il seguente schema:

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) - \frac{r\tau}{2}(w_j^{n+1} - \xi_j^{n+1}) \\ \xi_j^{n+1} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \frac{r\tau}{2}(w_j^{n+1} - \xi_j^{n+1}) \end{cases}$$

Lo schema precedente può essere riscritto in forma vettoriale come:

$$\begin{bmatrix} w_j^{n+1} \\ \xi_j^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1 - v\lambda}{1 + r\tau} \begin{bmatrix} (1 + r\frac{\tau}{2})w_j^n + r\frac{\tau}{2}\xi_j^n \\ r\frac{\tau}{2}w_j^n + (1 + r\frac{\tau}{2})\xi_j^n \end{bmatrix} + \frac{v\lambda}{1 + r\tau} \begin{bmatrix} (1 + r\frac{\tau}{2})w_{j-1}^n - r\frac{\tau}{2}\xi_{j+1}^n \\ r\frac{\tau}{2}w_{j-1}^n + (1 + r\frac{\tau}{2})\xi_{j+1}^n \end{bmatrix}$$

A partire da tale forma imponendo la CFL si trova:

$$|w_j^{n+1}| \leq \frac{1}{1 + r\tau} (\|\mathbf{w}^n\|_\infty + r\tau\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty) \leq \|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty$$

e facendo gli stessi passaggi per la seconda equazione si conclude:

$$\|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \leq \|(\mathbf{w}^0, \xi^0)\|_\infty \quad (29)$$

Abbiamo dunque ottenuto un metodo per (27) che sotto CFL risulta stabile per ogni valore di  $r$ .

Il nostro caso però risulta ben più complesso quindi a patto di non snaturare l'algoritmo visto nella precedente sezione non é possibile ricalcare questo schema.

Tuttavia possiamo adattare la nostra routine al nuovo metodo considerando la seguente approssimazione (derivata moralmente da una estrapolazione lineare) di  $\xi_j^{n+1}$ :

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^{n,*} + \tau \left( f(jh + v\tau, t^n) + \frac{1}{2}r(w_j^{n,*} - \xi_j^{n,*}) \right)$$

con  $w_j^{n,*} = w_j^n + v\lambda(w_{j+1}^n - w_j^n)$  e  $\xi_j^{n,*} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n)$ .

In questo modo il passo 3 può essere riadattato come segue:

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{r\tau}{2}} \left( w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + \tau \left( f_j^n + \frac{1}{2}r\xi_j^{n+1} \right) \right) \quad \text{per } j = 1, \dots, N_h - 1$$

con  $\xi_j^{n+1}$  definito prima.

Resta ancora fuori  $w_{N_h}^{n+1}$ , che può essere calcolato attraverso il seguente sistema  $2 \times 2$  ottenuto unendo il passo 4 e l'ultima equazione del passo 3.

$$\begin{cases} w_{N_h}^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{r\tau}{2}} (w_{N_h}^n - v\lambda(w_{N_h}^n - w_{N_h-1}^n) + \tau (f_j^{n+1} + \frac{1}{2}r\xi_{N_h}^{n+1})) \\ w_{N_h}^{n+1} + \xi_{N_h}^{n+1} = p_{0D}^{n+1} \end{cases}$$

Prima di passare all'esposizione dei risultati sperimentali vale la pena di dettagliare meglio quest'ultimo metodo.

*Metodo upwind-Eulero esplicito modificato*

Per  $n \geq 0$ :

1.

$$\xi_0^{n+1} = \xi^{*,n} + \tau \left( f(v\tau, t^n) + \frac{1}{2}r(w^{*,n} - \xi^{*,n}) \right)$$

2.

$$w_0^{n+1} = p_H^{n+1} - \xi_0^{n+1}$$

3.

per  $j = 1, \dots, N_h - 1$

$$w_j^{n,*} = w_j^n + v\lambda(w_{j+1}^n - w_j^n)$$

$$\xi_j^{n,*} = \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n)$$

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^{n,*} + \tau \left( f(jh + v\tau, t^n) + \frac{1}{2}r(w_j^{n,*} - \xi_j^{n,*}) \right)$$

$$w_j^{n+1} = \frac{2}{r\tau + 2} \left( w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + \tau \left( f_j^n + \frac{1}{2}r\xi_j^{n+1} \right) \right)$$

4.

$$p_{0D}^{n+1} = p_{0D}^n + \frac{\tau}{C_0} \left[ q_{0D}^n - \frac{1}{R_0} p_{0D}^n \right]$$

5.

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{r\tau}{2} & -\frac{r\tau}{2} \\ -\frac{r\tau}{2} & 1 + \frac{r\tau}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{N_h}^{n+1} \\ \xi_{N_h}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{N_h}^n - v\lambda(w_{N_h}^n - w_{N_h-1}^n) + \tau f_{N_h}^{n+1} \\ p_{0D}^{n+1} \end{bmatrix}$$

6.

$$\xi_j^{n+1} = \frac{2}{2 + r\tau} \left[ \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \tau \left( f_j^n + \frac{1}{2}r w_j^{n+1} \right) \right] \quad \text{per } j = N_h - 1, \dots, 0$$

Cerchiamo di trovare una stima anche per questo metodo, per farlo ci riferiamo ancora al problema (27). In tal caso il metodo diventa:

$$w_j^{n+1} = \frac{2}{2 + r\tau} \left[ w_j^n - v\lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) + \frac{r\tau}{2} (\xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n)) + \frac{r\tau}{2} (w_j^n + v\lambda(w_{j+1}^n - w_j^n) - v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) - \xi_j^n) \right]$$

$$\xi_j^{n+1} = \frac{2}{2 + r\tau} \left[ \xi_j^n + v\lambda(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n) + \tau \left( f_j^n + \frac{1}{2}r w_j^{n+1} \right) \right]$$

Imponendo la CFL e svolgendo i calcoli si trova:

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} &\leq \left[ 1 + \frac{(r\tau)^2}{2+r\tau} \right] \|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \\ \xi_j^{n+1} &\leq \left[ 1 + \frac{(r\tau)^3}{(2+r\tau)^2} \right] \|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty \end{aligned}$$

e dunque se  $r\tau$  é piccolo:

$$\|(\mathbf{w}^{n+1}, \xi^{n+1})\|_\infty \leq \left[ 1 + \frac{(r\tau)^2}{2+r\tau} \right] \|(\mathbf{w}^n, \xi^n)\|_\infty$$

A questo punto dobbiamo in qualche modo valutare il limite della successione:

$$M_n = \left[ 1 + \frac{(r\frac{T}{n})^2}{2+r\frac{T}{n}} \right]^n$$

Ricordando gli sviluppi in serie del logaritmo e la serie geometrica<sup>31</sup> si trova:

$$M_n \sim e^{\frac{(Tr)^2}{2n}}$$

dunque tende a 1 inoltre vale la disuguaglianza:

$$M_n \leq e^{\frac{Tr^2}{2}\tau} \quad (30)$$

che costituisce una stima di stabilit  ben pi  stringente di (28).

---

31

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{1-x} &\sim 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 5 Risultati numerici

Il lavoro numerico si articolerá nei seguenti punti

1. Analizzeremo un primo problema in cui  $r = 0$ ; verificheremo le stime di stabilitá e l'effettiva convergenza del metodo upwind-Eulero esplicito.
2. Studieremo nel caso  $r \neq 0$  l'ordine di convergenza.
3. Valuteremo come si modificano al crescere di  $r$  le proprietá di convergenza dei metodi upwind-Eulero esplicito e upwind-Eulero esplicito modificato.

### 5.1 Un primo esempio

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} p_t + \frac{1}{c}q_x + \frac{l}{cR_0^2} - 1 = 0 \\ q_t + \frac{1}{l}p_x = 0 \\ p_0(x) = -\frac{l}{R_0}x; \quad q_0(x) = C_0 - \frac{l}{R_0^2}x \quad p(0,t) = t; \\ q(1,t) = C_0p_t(1,t) + \frac{1}{R_0}p(1,t) \end{cases} \quad (31)$$

la cui soluzione esatta é:

$$p(x,t) = t - \frac{l}{R_0}x \quad q(x,t) = C_0 + \frac{1}{R_0}\left(t - \frac{l}{R_0}x\right)$$

Il codice utilizzato per la simulazione é riportato di seguito:

```
%PASSO 1: DEFINIZIONE DELLE COSTANTI (i valori indicati sono alcuni fra
quelli che saranno utilizzati)
%r=0; resistenza' del vaso
c=1; % wall compliance
l=100; % induttanza
v=sqrt(1/(l*c)); %velocita di propagazione
C_0=0.1; %capacita' equivalente del modello OD
R_0=0.01; %resistenza' equivalente del modello OD

%GRIGLIA
x0=0; %estremo sinistro
xN=1; %estremo destro

h=(xN-x0)/10; % passo spaziale
dt=0.0025; %passo temporale
T=dt*round(1/dt);
%piccolo accorgimento per poter utilizzare qualsiasi dt
lambda=dt/h;
xx=x0:h:xN;
tt=0:dt:T;
```

```

Nh=length(xx);
Nt=length(tt);
% E DEI DATI
Phi=@(t, x) 1/(c*(R_0)^2)-1+0*x;
%in quella che qui si chiama Phi è compreso il 1/c
p_0=@(x) -(1/R_0)*x;
q_0=@(x) C_0-(1/(R_0)^2)*x;
p_H=@(t) t;
%soluzioni esatte
p_ex=@(t,x) t-(1/R_0)*x;
q_ex=@(t,x) C_0+(1/R_0)*(-(1/R_0)*x+t);

%PASSO 2: DEFINIZIONE VARIABILI CARATTERISTICHE
p=[];
q=[];
%come noto matlab non necessita che le variabili vengano dichiarate
%di conseguenza non c'è bisogno che definisca cosa sono
%p e q al termine del codice
p(1,:)=feval(p_0, xx);
q(1,:)=feval(q_0, xx);

[w_old, xi_old]=caratteristiche1(p(1,:), q(1,:), c,1);
%"caratteristiche" definisce le variabili caratteristiche

%al passo m calcolo ciò che avviene all'istante m+1 (*_new)
tt=0:dt:T;

%rispetto alla routine c'è da scalare di 1 in avanti
%attenzione: p(m) significa p valutato all'istante temporale m-1
w_new=[];
xi_new=[];

for m=0:(Nt-2)

    %passo 1 della routine
    f = -0.5*feval(Phi, m*dt, v*dt);
    xi_tilde = xi_old(1)+(xi_old(2)-xi_old(1))*v*lambda+dt*f;

    %passo 2 della routine
    pHpH(m+1)=feval(p_H, (m+1)*dt);
    w_new(1)=pHpH(m+1)-xi_tilde;

    %passo 3 della routine
    PhiPhi=-0.5*feval(Phi, m*dt,xx);

```

```

w_new(2:Nh)=w_old(2:Nh)-v*lambda*(w_old(2:Nh)-w_old(1:Nh-1))+...
dt*PhiPhi(2:Nh);
%metodo upwind

%passo 4 della routine
p_OD=modelloOD(p(m+1,Nh),q(m+1,Nh),dt, R_0, C_0);

%passo 5 della routine
xi_new(Nh)=p_OD-w_new(Nh);

%passo 6 della routine
xi_new(1:Nh-1)=xi_old(1:Nh-1)+v*lambda*(xi_old(2:Nh)-...
xi_old(1:Nh-1))+dt*PhiPhi(1:Nh-1);
%metodo upwind

%raccordo
[p(m+2,:),q(m+2,:)]=fisiche1(w_new, xi_new, c,l);
%adesso ho la soluzione nelle variabili fisiche
%all'istante dt*(m+1)
w_old=w_new;
xi_old=xi_new;
plot(xx, p(m+2,:))
hold on
plot(xx, p_ex((m+1)*dt, xx), 'ro')
pause(0.05)
hold off
end

```

Le funzioni chiamate nel codice sono:

```

function [w, xi]=caratteristiche1(p, q, c,l)
%si ricorda che per come è scritto t deve
%essere uno scalare

w=0.5*(p+sqrt(1/c)*q);
xi=0.5*(p-sqrt(1/c)*q);
return

function [p,q]=fisiche1(w,xi, c,l)
%vanno bene sia vettori riga che colonna
p=w+xi;
q=sqrt(c/l)*(w-xi);
return

function [p_new]=modelloOD(p_old, q_old, dt, R_o, C_o)
%come modello OD stiamo ipotizzando una resistenza R_0,
%in parallelo ad una capacità C_0

```

```
%ancora una volta i valori sono a caso
```

```
p_new=(1-dt/(R_o*C_o))*p_old+(dt/C_o)*q_old; %Eulero esplicito  
%nel metodo ibrido al posto di q_old c'è q_new da calcolare con un  
%procedimento di estrapolazione  
return
```

Le condizioni di stabilità che ci aspettiamo sono la CFL (ovvero  $dt \leq \frac{h}{v} = h\sqrt{lc}$ ) e la condizione ( $S'$ ).

## Verifica della condizione di stabilità sull'accoppiamento dei due modelli

Al variare del passo di tempo verifichiamo la stima  $S'$ . Poniamo

$$C_0 = 0.01, R_0 = 0.1, c = l = 1$$

Con questi dati le due condizioni diventano:

$$\tau \leq 2.00 \cdot 10^{-3}; \quad \tau \leq h$$

Ponendo  $h = 0.1$  e facendo variare  $dt$  otteniamo i seguenti risultati (i passi temporali sono espressi in millesimi):

dt	stabile	errore
2.3	no	3.0089e+065
2.1	no	9.8322e+040
2	no	4.1753e+024
1.9	no	3.0801e+005
1.8	si	3.7303e-014

Se adesso poniamo  $h = 0.01$ :

dt	stabile	errore
2.1	no	1.6177e+041
2	no	4.1753e+024
1.9	no	3.0801e+005
1.8	sí	1.013e-013

### Osservazioni

- Osserviamo che diminuendo  $h$  l'errore è aumentato. Ciò è dovuto al fatto che essendo la soluzione lineare il metodo upwind integra esattamente pertanto già per  $h = 0.1$  l'errore è molto vicino allo zero macchina.

In questa situazione un incremento delle operazioni (dovuto all'abbassamento del passo spaziale) con i relativi errori di arrotondamento può portare ad un aumento dell'errore.

- Abbiamo verificato che le proprietà di stabilità legate all'accoppiamento non sono legate al passo spaziale. Aggiungiamo infine che se aumentiamo  $l$  (ovvero diminuiamo la velocità) il metodo può per  $t = 1$  non presentare ancora oscillazioni nonostante che  $(S')$  non sia rispettata.

In altre parole il metodo risulta stabile se vale la condizione  $(S')$ , nel caso in cui non sia verificata le oscillazioni iniziano a comparire a partire da un certo istante di tempo che dipende dalla velocità di propagazione  $\frac{1}{\sqrt{l}c}$ .

## Verifica della CFL

Per verificare la CFL consideriamo

$$C_0 = 1, R_0 = 1, c = l = 0.1$$

Ponendo  $h = 0.01$  si trova al variare di  $dt$  (valori in centesimi)

dt	stabile	errore
1	no	2.4123e+111
0.2	no	3.0899e+221
0.1	sì	1.2212e-015

I risultati sperimentali confermano le considerazioni teoriche.

## 5.2 Un secondo esempio

Consideriamo adesso il caso più generale di  $r \neq 0$ . Vorremmo verificare i risultati teorici relativi all'ordine di convergenza.

Come problema scegliamo il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_t + \frac{1}{c}q_x + t = 0 \\ q_t + \frac{1}{l}p_x + rq = 0 \\ p_0(x) = x; \quad q_0(x) = 3x \quad p(0, t) = t; \\ q(1, t) = C_0p_t(1, t) + \frac{1}{R_0}p(1, t) \end{array} \right. \quad (32)$$

dove  $c, l, r, C_0$  e  $R_0$  saranno definiti direttamente nel codice.

Siccome non disponiamo di una soluzione esatta, considereremo come soluzione esatta quella ottenuta con la griglia più raffinata.

La funzione che utilizzeremo è il seguente per risolvere il problema sarà la seguente:

```
function [p, q]=upwindgenerale(c,l, r, C_0, R_0, h, dt )
v=sqrt(1/(l*c)); %velocità di propagazione
x0=0; %estremo sinistro
xN=1; %estremo destro
T=1; %limite temporale delle osservazioni
lambda=dt/h;
xx=x0:h:xN;
tt=0:dt:T;
Nh=length(xx);
```

```

Nt=length(tt);
Phi=@(t,x) 0*x+t;
p_0=@(x) x;
q_0=@(x) 3*x;
p_H=@(t) t;

%PASSO 2: DEFINIZIONE VARIABILI CARATTERISTICHE
p=[];
q=[];
%come noto matlab non necessita che le variabili vengano dichiarate
%di conseguenza non c'è bisogno che definisca cosa sono p e q
%al termine del codice (anche se
%so già che saranno matrici ((T/dt+1)*(L/h+1))
p(1,:)=feval(p_0, xx);
q(1,:)=feval(q_0, xx);

[w_old, xi_old]=caratteristiche1(p(1,:), q(1,:), c,1);
%"caratteristiche" definisce le variabili caratteristiche: siccome la
%trasformazione rimane la stessa le funzioni ausiliarie di trasformazione
%non cambiano

%al passo m calcolo ciò che avviene all'istante m+1 (*_new)

%rispetto alla routine c'è da scalare di 1 in avanti
w_new=[];
xi_new=[];

for m=0:(Nt-2)

    %passo 1 della routine
    w_star=w_old(1)+(w_old(2)-w_old(1))*v*lambda;
    %approssimazione di w(m*dt, v*dt)
    xi_star=xi_old(1)+(xi_old(2)-xi_old(1))*v*lambda;
    %approssimazione di xi(m*dt, v*dt)
    f = -0.5*feval(Phi, m*dt, v*dt);
    xi_tilde = xi_old(1)+(xi_old(2)-xi_old(1))*v*lambda+
    dt*(f+0.5*r*(w_star-xi_star));

    %passo 2 della routine
    pHpH(m+1)=feval(p_H, (m+1)*dt);
    w_new(1)=pHpH(m+1)-xi_tilde;

    %passo 3 della routine
    PhiPhi=-0.5*feval(Phi, m*dt,xx);

```

```

w_new(2:Nh)=w_old(2:Nh)-v*lambda*(w_old(2:Nh)-w_old(1:Nh-1))+
dt*(PhiPhi(2:Nh)-0.5*r*(w_old(2:Nh)-xi_old(2:Nh)));
%metodo upwind

%passo 4 della routine
p_OD=modelloOD(p(m+1,Nh),q(m+1,Nh),dt, R_0, C_0);

%passo 5 della routine
xi_new(Nh)=p_OD-w_new(Nh);

%passo 6 della routine
xi_new(1:Nh-1)=xi_old(1:Nh-1)+v*lambda*(xi_old(2:Nh)-xi_old(1:Nh-1))+
dt*(PhiPhi(1:Nh-1)+0.5*r*(w_old(1:Nh-1)-xi_old(1:Nh-1)));
%metodo upwind
%raccordo
[p(m+2,:),q(m+2,:)]=fisiche1(w_new, xi_new, c,l);
%adesso ho la soluzione nelle variabili fisiche
%all'istante dt*(m+1)
w_old=w_new;
xi_old=xi_new;
plot(xx, p(m+2,:))
hold on
plot(xx, q(m+2, :), 'ro')
pause(0.05)
hold off
end

return

```

La funzione precedente é inserita nel main che di seguito inserisco:

%Parte numerica della tesi: esempio 2.

```

%PASSO 1: DEFINIZIONE DELLE COSTANTI
r=1; %resistenza del vaso
c=10000; % wall compliance
l=10000; % induttanza
v=sqrt(1/(l*c)); %velocita' di propagazione
C_0=1; %capacita' equivalente del modello OD
R_0=1; %resistenza equivalente del modello OD

h=0.00005; %pongo h molto più piccolo
%devo premurarmi di stare sempre dentro la cfl
%altrimenti esplode tutto
dt=0.1*2^(-5);
[p_ex, q_ex]=upwindgenerale(c,l, r, C_0, R_0, h, dt);
%prendo questa come soluzione esatta

```

```

for i=0:4
    dt=0.1*2^(-i);
    [p, q]=upwindgenerale(c,l, r, C_0, R_0, h, dt);
    g(i+1)=newmax(p, p_ex, i, 5);
    %questa funzione trova la differenza massima
end

log2(g(1:4)./g(2:5))

%stima dell'ordine di convergenza in spazio
%Parte numerica della tesi: esempio 2.
%PASSO 1: DEFINIZIONE DELLE COSTANTI
r=1; %resistenza del vaso
c=1; % wall compliance
l=1; % induttanza
v=sqrt(1/(l*c)); %velocita di propagazione
C_0=1; %capacita equivalente del modello OD
R_0=1; %resistenza equivalente del modello OD
dt=0.001;
%devo premurarmi di stare sempre dentro la cfl
%altrimenti esplode tutto
h=0.1*2^(-4);
[p_ex, q_ex]=upwindgenerale(c,l, r, C_0, R_0, h, dt);
%prendo questa come soluzione esatta

for i=0:3
    h=0.1*2^(-i);
    [p, q]=upwindgenerale(c,l, r, C_0, R_0, h, dt);
    g(i+1)=newmax2(p, p_ex, 4, i);
    %questa funzione trova la differenza massima
end

log2(g(1:3)./g(2:4))

```

Per l'ordine di convergenza in tempo otteniamo:

1.1035 1.1256 1.2350 1.5911

Il risultato é abbastanza in linea con quanto previsto (ordine 1). Infatti se ipotizziamo, come é ragionevole fare un errore della forma  $Ct^p + Dh^q$  ai fini di stimare  $q$  risulta piú attendibile una stima con  $dt \gg h$ .

Per quanto riguarda invece l'ordine di convergenza in spazio otteniamo:

0.6768 0.8346 1.2320

Ancora una volta le stime sono fundamentalmente corrette.

Per completezza inserisco anche una delle due funzioni usate per calcolare il massimo (l'altra é uguale a patto di modificare opportunamente gli indici):

```
function [g]=newmax(p, p_ex, i, k)
if i<=k
    return
end

g=0; %inizializzazione
[Nt,Nh]=size(p);

for m=0:Nh-1
    v=[g, max(abs( p(:,m+1)-p_ex(:,m*2^(i-k)+1) ) )]);
    g=max(v);
end

return
```

### 5.3 Un ultimo esempio

Resta da chiarire l'effettiva efficienza della funzione `upwindgenerale` utilizzata al crescere di  $r$ . Prendendo sempre come problema modello (32) questa volta scegliamo  $r = 100$ ,  $c = 1$ ,  $l = 1$ ,  $C_0 = 1$ ,  $R_0 = 1$ .

Come la stima (28) suggeriva anche con griglie molto raffinate, le approssimazioni trovate presentano forti oscillazioni.

Ad esempio con  $dt = 0.001$ ,  $h = 0.001$  la nostra soluzione risulta gravemente instabile.

Proprio alla luce di questo risultato proponiamo l'altro metodo semi-implicito definito nella sezione 4.4 e di seguito riportato nella funzione Matlab

`upwindgeneralemodificato`:

```
function [p, q]=upwindgeneraleMODIFICATO(c,l, r, C_0, R_0, h, dt )
v=sqrt(1/(l*c)); %velocita di propagazione
x0=0; %estremo sinistro
xN=1; %estremo destro
T=1; %limite temporale delle osservazioni
lambda=dt/h;
xx=x0:h:xN;
tt=0:dt:T;
Nh=length(xx);
Nt=length(tt);

Phi=@(t,x) 0*x+t;
p_0=@(x) x;
q_0=@(x) 3*x;
p_H=@(t) t;
```

```

%PASSO 2: DEFINIZIONE VARIABILI CARATTERISTICHE
p=[];
q=[];

p(1,:)=feval(p_0, xx);
q(1,:)=feval(q_0, xx);

[w_old, xi_old]=caratteristiche1(p(1,:), q(1,:), c,1);
%"caratteristiche" definisce le variabili caratteristiche: siccome la
%trasformazione rimane la stessa le funzioni ausiliarie di trasformazione
%non cambiano

%al passo m calcolo ciò che avviene all'istante m+1 (*_new)

%rispetto alla routine c'è da scalare di 1 in avanti
%attenzione: p(m) significa p valutato all'istante temporale m-1

w_new=[];
xi_new=[];
A=[1+dt*r, -dt*r/2; 1, 1 ];

for m=0:(Nt-2)

    %passo 1 della routine
    w_star=w_old(1)+(w_old(2)-w_old(1))*v*lambda;
    %approssimazione di w(m*dt, v*dt)
    xi_star=xi_old(1)+(xi_old(2)-xi_old(1))*v*lambda;
    %approssimazione di xi(m*dt, v*dt)
    f = -0.5*feval(Phi, m*dt, v*dt);
    xi_tilde = xi_old(1)+(xi_old(2)-xi_old(1))*v*lambda+...
    dt*(f+0.5*r*(w_star-xi_star));

    %passo 2 della routine
    pHpH(m+1)=feval(p_H, (m+1)*dt);
    w_new(1)=pHpH(m+1)-xi_tilde;

    %passo 3 della routine
    PhiPhi=-0.5*feval(Phi, (m+1)*dt,xx);
    PhiPhimod=-0.5*feval(Phi, m*dt,xx+v*dt);

    %I MODIFICA
    w_star(1:Nh-2)=w_old(2:Nh-1)+(w_old(3:Nh)-w_old(2:Nh-1))*v*lambda;
    xi_star(1:Nh-2)=w_old(2:Nh-1)+(xi_old(3:Nh)-xi_old(2:Nh-1))*v*lambda;

```

```

xi_mod(1:Nh-2)=xi_old(2:Nh-1)+v*lambda*(xi_old(2:Nh-1)-xi_old(1:Nh-2))...
+dt*(PhiPhimod(2:Nh-1)+0.5*r*(w_star(1:Nh-2)-xi_star(1:Nh-2)));

w_new(2:Nh-1)=(1+(dt*r/2))^( -1)*(w_old(2:Nh-1)-v*lambda*(w_old(2:Nh-1)-
w_old(1:Nh-2))+dt*(PhiPhi(2:Nh-1)+0.5*r*xi_mod(1:Nh-2)));
%metodo upwind (gli indici di w_star e xi_star sono sfasati di uno perche'
%i due vettori hanno meno elementi)

%passo 4 della routine
p_OD=modelloOD(p(m+1,Nh),q(m+1,Nh),dt, R_0, C_0);
%qui sto calcolando p_OD^(m+1)

%II MODIFICA (fondalmente trovo l'ultimo dato mancante risolvendo un
%sistema lineare 2x2)
d=w_old(Nh)-v*lambda*(w_old(Nh)-w_old(Nh-1))+dt*Phi((m+1)*dt, xN);
%A=[1+dt*r, -dt*r/2; 1, 1 ] e' stata definita fuori dal for
vettore=inv(A)*[d; p_OD];
w_new(Nh)=vettore(1); xi_new(Nh)=vettore(2);

%passo 6 della routine
xi_new(1:Nh-1)=(1+(dt*r/2))^( -1)*(xi_old(1:Nh-1)+...
v*lambda*(xi_old(2:Nh)-xi_old(1:Nh-1))+dt*(PhiPhi(1:Nh-1)
+0.5*r*(w_new(1:Nh-1))));
%metodo upwind

%racordo
[p(m+2,:),q(m+2,:)] = fisiche1(w_new, xi_new, c,1);
%adesso ho la soluzione nelle variabili fisiche
%all'istante dt*(m+1)
w_old=w_new;
xi_old=xi_new;
plot(xx, p(m+2,:))
hold on
plot(xx, q(m+2, :), 'ro')
title(sprintf('passo temporale = %f, spaziale = %f, tempo=%f',
dt, h, (m+1)*dt));
pause(0.05)
hold off
end
return

```

Questo metodo non presenta oscillazioni addirittura con  $h = dt = 0.01$ , tuttavia il metodo non é incondizionatamente stabile rispetto a  $r$ : infatti per  $r = 1000$  e  $h = dt = 0.01$  abbiamo instabilità (subito sanata una volta posto  $h = dt =$

0.001).

Ciò non è affatto in contraddizione con la stima dedotta analiticamente in quanto quest'ultima vale solamente asintoticamente quando  $r\tau$  è piccolo.

In sostanza dunque il secondo metodo risulta ancora condizionatamente stabile rispetto a  $r$ , ma la stima di stabilità risulta essere ben più stringente rendendo di fatto il secondo metodo ben più adatto laddove la resistenza del vaso sia significativa.

## 6 Bibliografia

### Riferimenti bibliografici

- [1] Fung, *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer, 1993
- [2] Quarteroni, Formaggia, Veneziani *Cardiovascular mathematics* Springer, 2009
- [3] Gurtin *An introduction to continuum mechanics* Academic press, 1981
- [4] Bergel *Cardiovascular fluid dynamics, Volume 2* 1972, Academic press
- [5] Fung, Frobek, Patitucci *Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression* 1979, The American Physiological Society, 237
- [6] Quarteroni, Formaggia *Mathematical modeling and numerical simulation of the cardiovascular system* 2002, capitolo inserito in *Modeling of living systems* P.G.Ciarlet and J.L.Lions Eds.
- [7] Sherwin, Formaggia, Peiró, Franké *Computational modeling of 1d blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system* 2003, International Journal for numerical methods in fluids.
- [8] Fernández, V. Milisic, Quarteroni *Analysis of a geometrical multiscale blood flow model based on the coupling of ODE's and hyperbolic PDE's*. SIAM J. on Multiscale Model. Simul., 4(1):215-236, 2005.
- [9] Fernández, Milisic, Quarteroni *Analysis of a geometrical multiscale blood flow model based on the coupling of ODE's and hyperbolic PDE's*. SIAM J. on Multiscale Model. Simul., 4(1):215-236, 2005
- [10] Salsa *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli applicazioni* 2010 Springer
- [11] A. Quarteroni, *Modellistica numerica per problemi differenziali*. 2008 Springer
- [12] SIAM REVIEW I. E. Leonard *The matrix exponential*, Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 38, No. 3, pp. 507-512, September 1996

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione modellistica</b>	<b>2</b>
1.1	Le equazioni di bilancio . . . . .	5
1.2	Modelli semplificati della meccanica della parete arteriosa . . . . .	8
1.3	Il modello lineare . . . . .	14
1.4	Modelli a parametro concentrato ( <i>Lumped parameters model</i> ) . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Il modello di riferimento</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Analisi del modello linearizzato</b>	<b>19</b>
3.1	Il problema . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Buona posizione del problema</b>	<b>20</b>
4.1	Un metodo numerico . . . . .	24
4.2	Un altro metodo . . . . .	26
4.3	Analisi del metodo . . . . .	29
4.4	Il caso $r \neq 0$ . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>37</b>
5.1	Un primo esempio . . . . .	37
5.2	Un secondo esempio . . . . .	41
5.3	Un ultimo esempio . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>