**Activité : Achille et la Tortue vont au stade....**

Vincent Bruneau, Institut de mathématiques de l'université de Bordeaux

---

## Le Paradoxe de Zénon... suites et fonctions

Zénon d'Elée, né vers 490 avant J.-C., fut un grand mathématicien qui a posé de nombreux problèmes (des paradoxes) à plusieurs générations de mathématiciens. L'un des plus connu est celui de *Achille et la Tortue :*

Achille voit une tortue en avant sur son chemin et se met à courir pour la rattraper. Lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé. Il doit donc atteindre maintenant la nouvelle place qu'elle occupe, et ainsi de suite... Par conséquent, Achille ne pourra jamais rattraper la tortue puisqu'il doit toujours parvenir d'abord au point que la tortue vient de quitter ! .... Essayons d'expliciter mathématiquement le problème...

### 1. Le Paradoxe de Zenon, une histoire d'infinis...

Considérons le cas où Achille avance à la vitesse de 200 m/min et que la Tortue possède au départ 400 m d'avance sur Achille, en marchant à la vitesse de 10 m/min. On note $t_1$ le temps qui s'est écoulé pendant l'étape 1, c'est-à-dire pour que Achille arrive où la tortue était au départ, mais la tortue a avancé... On note alors $t_2$ le temps qui s'est écoulé pendant l'étape 2, pour que Achille parcourt la distance parcourue par la tortue pendant le temps $t_1$. Ainsi de suite, on note $t_{k+1}$ le temps qui s'est écoulé pour que Achille parcourt la distance parcourue par la tortue pendant le temps $t_k$...

(1) Déterminer $t_1$, $t_2$, $t_3$. On pourra représenter sur une droite les positions de $A$ (Achille) et de $B$ (Bobu la tortue) aux différentes étapes (par exemple en notant $A_k$ et $B_k$ les positions de $A$ et $B$ à la $k$ième étape).

(2) Exprimer $t_{k+1}$ en fonction de $t_k$ pour $k \geq 1$.

(3) Quelle est la nature de la suite $(t_k)_k$ ? Exprimer $t_k$ en fonction de $k$.

(4) Que représente la quantité suivante ?

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Déterminer l'expression de $T_n$ en fonction de $n$.

(5) Montrer que la suite $(T_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

(6) A la lumière de ces calculs, expliquer le Paradoxe de Zénon.

### 2. Et si on calculait les distances parcourues...

On propose maintenant une autre manière de résoudre ce problème en considérant toujours que Achille avance à la vitesse de 200 m/min et que la Tortue possède au départ 400 m d'avance sur Achille, en marchant à la vitesse de 10 m/min. On désigne par $O$ le point de départ d'Achille.

(1) On note $a(t)$ la distance de Achille à $O$ et $b(t)$ la distance de la tortue à $O$ au court du temps $t$. Quelle est la valeur de $a(0)$ et de $b(0)$ ? Donner l'expression de $a(t)$ et de $b(t)$.

(2) Comment traduire mathématiquement que Achille rattrape la Tortue ?

(3) Déterminer l'instant $t$ quand Achille rattrape la Tortue. Quelle distance Achille aura-t'il parcouru ?

## 3. Et si Achille partait de Starting Blocks...

Dans ce qui précède, Achille courait à 200 m/min dès le début. On veut maintenant considérer une situation où sa vitesse initiale est nulle. On suppose désormais que la vitesse d'Achille dépend du temps de la manière suivante :

$$v(t) = 200\,t \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } v(t) = 200 \text{ si } t \geq 1. \qquad (\star)$$

Dans cette nouvelle situation, au bout de combien de temps Achille va-t-il rattraper la Tortue, si cette dernière avance toujours à 10 m/min... ? C'est ce que nous tentons de trouver dans la suite.

(1) La distance parcourue par Achille au bout du temps $t$ est-elle encore égale à la vitesse multipliée par le temps ?

(2) Essayons d'étudier approximativement la distance parcourue par Achille au cours de la première minute. Pour cela nous divisons l'intervalle $[0,1]$ en $N$ intervalles de petite longueur $h = \frac{1}{N}$ et posons $t_k = k\,h$. Sur chaque intervalle $[t_{k-1}, t_k]$, on propose d'approcher la vitesse $v(t)$ par $v_k$, sa valeur au milieu de l'intervalle.

   (a) Quelle est la nature de la suite $(t_k)_k$ ?

   (b) Donner la valeur de $v_1$ et $v_2$ en fonction de $h$, puis de $v_k$ en fonction de $k$ et $h$.

   (c) Avec cette approximation, quelle est la distance $d_1$ parcourue au bout d'un temps $h$ ? Quelle est la distance $d_2$ parcourue au bout d'un temps $2h$ ?

   (d) Toujours avec cette approximation, donner l'expression de $d_{k+1}$, parcourue au bout d'un temps $t_{k+1}$, en fonction de $d_k$, la distance parcourue au bout d'un temps $t_k$.

   (e) A l'aide d'un tableur représenter la suite $(d_k)_k$ en fonction des $(t_k)_k$ (pour $h = \frac{1}{10}$).

   (f) A quelle fonction de référence vous fait penser ce graphe ?

(3) Le but est maintenant de déterminer exactement la fonction $d(t)$ qui fournit la distance parcourue par Achille au cours du temps, lorsque sa vitesse $v(t)$ est donnée par $(\star)$.

   (a) Si $d(t) = t^2$ quelle serait la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[0,1]$, sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$ ?

   (b) Si $d(t) = t^2$, pour un $t_0$ fixé, quelle serait la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + h]$ ?

   (c) A quelle quantité mathématique et quelle quantité physique correspond la vitesse sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + h]$ lorsque $h$ tend vers 0.

   (d) Quelle est la vitesse instantanée correspondant à une évolution de la distance donnée par $d(t) = t^2$ ?

   (e) Déterminer la fonction $d(t)$ qui fournit la distance parcourue par Achille au cours du temps lorsque sa vitesse $v(t)$ est donnée par $(\star)$.

(4) On considère que la vitesse d'Achille, $v(t)$, est donné par $(\star)$ et que la Tortue avance à une vitesse constante de 10 m/min. Déterminer l'instant $t$ quand Achille rattrape la tortue lorsque la Tortue possède 50 m d'avance au départ, puis dans le cas où elle a 400m d'avance.