Analyse spectrale pour la Physique Mathématique

Motivations

I) Exemples d'équations d'évolution en Physique
II) Rôle du spectre pour l'étude de ces équations
III) Objectifs et plan du cours

De nombreux modèles décrivant des phénomènes physique au cours du temps t, sont régis par des équations de la forme:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(x)} + \text{ cond. init. } + \text{ cond. au bord } + \ldots$$

$t \in \mathbb{R}$: le temps
$x \in \mathbb{R}^d$: la position
$u(t,x)$: quantité physique (température, vitesse, champ électromagnétique, ...)
A: un opérateur (i.e. application linéaire)
Ou encore:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + Au(t,x) = f(x)}$$

De nombreux modèles décrivant des phénomènes physique au cours du temps t, sont régis par des équations de la forme:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(x)} + \text{ cond. init. } + \text{ cond. au bord } + \ldots$$

$t \in \mathbb{R}$: le temps
$x \in \mathbb{R}^d$: la position
$u(t,x)$: quantité physique (température, vitesse, champ électromagnétique, ...)
A: un opérateur (i.e. application linéaire)
Ou encore:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + Au(t,x) = f(x)}$$

De nombreux modèles décrivant des phénomènes physique au cours du temps t, sont régis par des équations de la forme:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(x)} + \text{ cond. init. } + \text{ cond. au bord } + \ldots$$

$t \in \mathbb{R}$: le temps
$x \in \mathbb{R}^d$: la position
$u(t,x)$: quantité physique (température, vitesse, champ électromagnétique, ...)
A: un opérateur (i.e. application linéaire)
Ou encore:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + Au(t,x) = f(x)}$$

Exemple 1: mécanique des fluides

L'équation linéarisée de Navier-Stokes, pour décrire des mouvements suffisamment lents de sorte que les vitesses de déformation du fluide restent petites, donne l'approximation de Stokes:
$u = (u_1, u_2, u_3)$ vecteur vitess de déformation du fluide (dans Ω)

$$\begin{cases} \mathrm{div}\ u = 0 & \text{sur } [0,T] \times \Omega \quad \text{(incompressible)} \\ \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = \dfrac{f}{\rho} - \nabla \dfrac{p}{\rho_0}} & \text{sur } [0,T] \times \Omega \quad \text{(cons. qt. mvt.)} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \quad \text{(donnée initiale)} \\ u = 0 & \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega \quad \text{(donnée au bord)} \end{cases}$$

ρ, ρ_0: masse vol.; ν: viscosité; f: force ext.; p: pression

Exemple 2: équation de la chaleur

Le modèle précédent ne prend pas en compte les variations de température.

La variation de température d'un solide (ou d'un fluide non en mvt) est donnée par l'équation de la chaleur:

$T(t, x)$: la température au point $x \in \mathbb{R}^3$, à l'instant t vérifie

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0} \\ T(0, x) = T_0(x) \end{cases}$$

k: coefficient de dissipation

Exemple 3: équation des ondes

En acoustique le fluide (l'air) est irrotationnel (rot(u)=0). Il existe une fonction Φ telle que $u = \nabla\Phi$ avec Φ vérifiant l'équation des ondes:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\Phi = 0} \\ \\ \Phi(0,x) = 0 = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x) \end{cases}$$

Exemple 4: mécanique du solide

Pour des petites perturbations ($\rightarrow$ équation linéaire) d'un matériau homogène (isotrope $\rightarrow$ coeff. const.) de masse volumique ρ_0, les déplacements $u = (u_1, u_2, u_3)$, vérifient l'équation d'élasticité:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div})u = f} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0,x) = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} u(0,x) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

λ, μ: coefficients de Lamé.

Exemple 5: électromagnétisme

Les phénomènes électromagnétiques dans le vide sont décrits à l'aide du champ électrique $E = (E_1, E_2, E_3)$ et de l'induction magnétique $B = (B_1, B_2, B_3)$ qui vérifient l'équation de Maxwell:

$$\begin{cases} \boxed{-\dfrac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{rot} B = j} & \text{loi de Maxwell-Ampère} \\ \mathrm{div}\, E = \rho & \text{loi de Gauss électrique} \\ \boxed{\dfrac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot} E = 0} & \text{loi de Maxwell-Faraday} \\ \mathrm{div}\, B = 0 & \text{loi de Gauss magnétique} \end{cases}$$

ρ: densité de charge, j: densité de courant.

$+$ conditions initiales et conditions aux bords

Exemple 5: électromagnétisme

En posant

$$U = \begin{pmatrix} -E \\ B \end{pmatrix}$$

l'équation de Maxwell s'écrit encore:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial U}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & \text{rot} \\ \text{rot} & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \text{div } U = \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si absence de charge: $\rho = 0 = j$, comme

$$\text{rot}\,\text{rot}E = -\Delta E + \nabla \text{div} E,$$

E (et B) vérifient une équation des ondes vectorielle:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0}$$

Exemple 5: électromagnétisme

En posant

$$U = \begin{pmatrix} -E \\ B \end{pmatrix}$$

l'équation de Maxwell s'écrit encore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\partial U}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{rot} \\ \mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \mathrm{div}\ U = \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Si absence de charge: $\rho = 0 = j$, comme

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} E = -\Delta E + \nabla \mathrm{div} E,$$

E (et B) vérifient une équation des ondes vectorielle:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0}$$

Exemple 6: Physique quantique

En physique quantique, l'évolution d'une particule de masse m soumise à un champ électrique qui dérive d'un potentiel V est décrite par une fonction d'état ϕ qui vérifie l'équation de Schrödinger:

$$\boxed{i\bar{h}\frac{\partial \phi}{\partial t}\phi(t,x) + \left(\frac{\bar{h}^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\phi(t,x) = 0}$$

$\bar{h}$: contante de Planck

La quantité

$$\int_\Omega |\phi(t,x)|^2 dx$$

représente la probabilité de trouver la particule dans Ω à l'instant t.

...

Et encore des équations similaires en biologie, économétrie, ...

Donc...

de nombreux modèles décrivant des phénomènes physique au cours du temps t, sont régis par des équations de la forme:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(x)}$$

Ou encore:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + Au(t,x) = f(x)}$$

A: un opérateur (i.e. application linéaire)
Un exemple qui revient souvent:

$$Au(t,x) = \Delta u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

Rôle du spectre: problèmes stationnaires

La recherche de solutions stationnaires est directement liée à la recherche de valeur propres (i.e. trouver (λ, f) tel que $Af = \lambda f$):

- En mécanique (fluide ou solide) une solution stationnaire est une solution qui varie peu au cours du temps.
  On néglige alors les dérivées partielles par rapport à t:
  $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) = f(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + Au(t,x) = f(x)$ $(*)$
  deviennent
  $$\boxed{Au = f}$$
- En électromatisme et acoustique une solution stationnaire décrit une solution de la forme
  $$u(t,x) = u_0(x)e^{iwt} \qquad (\text{"monochromatique"})$$
  Alors $(*)$ deviennent:
  $$\boxed{Au + iwu = f} \qquad \boxed{Au - w^2 u = f}$$

$\boxed{Au = f}$ $\boxed{Au + iwu = f}$ $\boxed{Au - w^2 u = f}$

- Pour $f = 0$ (pas de forces ext.):

  $\boxed{Au = 0}$ $\boxed{Au = -iwu}$ $\boxed{Au = w^2 u}$

  Il existe des solutions $u \neq 0$ si:

  $\boxed{0 \text{ v.p.}}$ $\boxed{-iw \text{ v.p.}}$ $\boxed{w^2 \text{ v.p.}}$

- Pour $f \neq 0$, il existe une unique solution si:

  $\boxed{0 \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{-iw \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{w^2 \notin \text{ sp.}}$

  Guide d'onde: une onde qui se propage dans une direction x_3

  $u_0(x) = e^{ikx_3} u_3(x_1, x_2)$, $-\Delta u_0 = w^2 u \Longrightarrow -\Delta u_3 = (w^2 - k^2) u_3$

  revient à choisir w et k tels que $(w^2 - k^2)$ est valeur propre.

$\boxed{Au = f}$ $\boxed{Au + iwu = f}$ $\boxed{Au - w^2u = f}$

- Pour $f = 0$ (pas de forces ext.):

$\boxed{Au = 0}$ $\boxed{Au = -iwu}$ $\boxed{Au = w^2u}$

Il existe des solutions $u \neq 0$ si:

$\boxed{0 \text{ v.p.}}$ $\boxed{-iw \text{ v.p.}}$ $\boxed{w^2 \text{ v.p.}}$

- Pour $f \neq 0$, il existe une unique solution si:

$\boxed{0 \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{-iw \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{w^2 \notin \text{ sp.}}$

Guide d'onde: une onde qui se propage dans une direction x_3

$u_0(x) = e^{ikx_3}u_3(x_1, x_2)$, $-\Delta u_0 = w^2u \Longrightarrow -\Delta u_3 = (w^2 - k^2)u_3$

revient à choisir w et k tels que $(w^2 - k^2)$ est valeur propre.

$\boxed{Au = f}$ $\boxed{Au + iwu = f}$ $\boxed{Au - w^2 u = f}$

- Pour $f = 0$ (pas de forces ext.):

  $\boxed{Au = 0}$ $\boxed{Au = -iwu}$ $\boxed{Au = w^2 u}$

  Il existe des solutions $u \neq 0$ si:

  $\boxed{0 \text{ v.p.}}$ $\boxed{-iw \text{ v.p.}}$ $\boxed{w^2 \text{ v.p.}}$

- Pour $f \neq 0$, il existe une unique solution si:

  $\boxed{0 \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{-iw \notin \text{ sp.}}$ $\boxed{w^2 \notin \text{ sp.}}$

  Guide d'onde: une onde qui se propage dans une direction x_3

  $$u_0(x) = e^{ikx_3} u_3(x_1, x_2), \; -\Delta u_0 = w^2 u \Longrightarrow -\Delta u_3 = (w^2 - k^2) u_3$$

  revient à choisir w et k tels que $(w^2 - k^2)$ est valeur propre.

Rôle du spectre: problèmes non-stationnaires

Par exemple pour $f = 0$, si A est "diagonalisable", les solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -Au(t,x)$$

sont de la forme

$$u(t,x) = \sum e^{-t\lambda_j} u_j(x); \qquad \lambda_j \text{ v.p. de } A$$

au moins en dimension finie....! (les matrices)
$\rightarrow$ Utile pour des études de stabilité! (comportement pour t grand)
$\rightarrow$ Même pour des équations non-linéaires $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x))$ (étude du linéarisé)

Rôle du spectre: problèmes non-stationnaires

Par exemple pour $f = 0$, si A est "diagonalisable", les solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -Au(t,x)$$

sont de la forme

$$u(t,x) = \sum e^{-t\lambda_j} u_j(x); \qquad \lambda_j \text{ v.p. de } A$$

au moins en dimension finie....! (les matrices)
$\to$ Utile pour des études de stabilité! (comportement pour t grand)
$\to$ Même pour des équations non-linéaires $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x))$ (étude du linéarisé)

Rôle du spectre: problèmes non-stationnaires

Par exemple pour $f = 0$, si A est "diagonalisable", les solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -Au(t,x)$$

sont de la forme

$$u(t,x) = \sum e^{-t\lambda_j} u_j(x); \qquad \lambda_j \text{ v.p. de } A$$

au moins en dimension finie....! (les matrices)
$\rightarrow$ Utile pour des études de stabilité! (comportement pour t grand)
$\rightarrow$ Même pour des équations non-linéaires $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x))$ (étude du linéarisé)

Rôle du spectre en mathématiques

Nous avons vu:

- spectre naturellement liée à des questions de physique
- de nombreuses équations impliquent l'opérateur Laplacien Δ.

Connaissance du spectre: rôle très important en math.:
Par ex., si $\exists$ une base o.n. de v.p. $(\phi_j)_j$ de A_0, $A_0\phi_j = \lambda_j\phi_j$ alors:

- on sait résoudre $A_0\phi = f$ et $\partial_t u + A_0 u = 0$:

$$\phi = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}\langle f, \phi_j\rangle\phi_j; \qquad u(t,.) = \sum_j e^{-t\lambda_j}\langle u_0, \phi_j\rangle\phi_j$$

- on a un espace d'approximation de dimension finie: vect$(\phi_1, ..., \phi_N)$ $\rightarrow$ intétêt théorique et numérique
- étude d'équations + complexes avec $A = A_0 +$ "pertubation"

Rôle du spectre en mathématiques

Nous avons vu:

- spectre naturellement liée à des questions de physique
- de nombreuses équations impliquent l'opérateur Laplacien Δ.

Connaissance du spectre: rôle très important en math.:
Par ex., si $\exists$ une base o.n. de v.p. $(\phi_j)_j$ de A_0, $A_0\phi_j = \lambda_j\phi_j$ alors:

- on sait résoudre $A_0\phi = f$ et $\partial_t u + A_0 u = 0$:

$$\phi = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}\langle f, \phi_j\rangle\phi_j; \qquad u(t,.) = \sum_j e^{-t\lambda_j}\langle u_0, \phi_j\rangle\phi_j$$

- on a un espace d'approximation de dimension finie: $\mathrm{vect}(\phi_1, ..., \phi_N) \rightarrow$ intétêt théorique et numérique
- étude d'équations + complexes avec $A = A_0 +$ "pertubation"

Objectif: définir et étudier le spectre d'opérateurs de type Laplacien

Plan:

- spectre des opérateurs bornés (compacts, auto-adj.): rappels
- opérateurs non-bornés, exemples du Laplacien
- spectre, resolvante, projection spectrale
- opérateurs à résolvante compacte
- théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints
- Min-Max, Inég. de Weyl, opérateurs à trace et de H-S
- théorie des perturbations
- étude d'asymptotiques spectrales (BKW, perturbation de v.p.)

Références

- M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, New York 1978
- P.D. Hislop, I.M. Sigal, *Introduction to Spectral Theory, With Application to Schrödinger Operators*, Applied Mathematical Sciences, 113, Springer-Verlag, New-York, Inc., 1996.
- T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1966.
- Chapitre 4 de M. Dimassi, J. Sjostrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit* , Cambridge University Press , New York, Cambridge, London Math. Soc. lecture note series, 268.