ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
S1 D'AUTOMNE
Epreuve : Algèbre 2 - Partiel 1
Date : Vendredi 14 Octobre 2015
Heure : 9h20-10h50 Durée : 1h30
Lieu : A22 Amphi Wegener
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Surveillants : Jean-Jacques Ruch et Raphael Hochard
Collège Sciences et technologies

La clarté de la présentation et des explications sera notée sur 2 points, portant le total des points à 20.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question et de passer à la question suivante.

Exercice 1 **(sur** $1 + 2 = 3$ **points)**

Soit $(G, *)$ un groupe et g_1, g_2 deux éléments de G.

1. Exprimer l'inverse de $g_1 * g_2$ en fonction des inverses de g_1 et de g_2.
2. On suppose que g_1, g_2 et $g_1 * g_2$ sont d'ordre deux. Montrer que $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Exercice 2 (sur $2+2+1+1+1=7$ points)

1. Soient F et G des polynômes non constants à coefficients entiers. Montrer qu'il existe Q et R dans $\mathbb{Q}[X]$ ainsi qu'un entier m tels que $G = QF + R$, $\deg R < \deg F$ et tels que mQ et mR sont à coefficients entiers.
2. Montrer que si pour un entier n, l'entier $F(n)$ divise l'entier $G(n)$ alors $\frac{mR(n)}{F(n)}$ est un entier.
3. Montrer que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. On suppose que l'entier $F(n)$ divise l'entier $G(n)$ pour une infinité d'entiers n. Montrer que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ est nul pour une infinité d'entiers n.
5. En déduire que F divise G dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3 (sur 2 points)

Quelle est la définition d'un anneau ?

Exercice 4 (sur $2+2=4$ points)

1. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que $(-1)^{\sum_{j=1}^{n} (j+\sigma(j))} = 1$.
2. Soit $A := (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B := (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j} := (-1)^{i+j}\, a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

Exercice 5 (sur 2 points)

On considère $n \geqslant 3$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des complexes et M la matrice $M := (a_i + b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Déterminer sans calcul la valeur de $\det M$.