université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Algèbre Linéaire 2** **Devoir Surveillé 1** **Date : 12/10/2018 Heure : 8h30 Durée : 1h30** Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département DL Licence

Exercice 1 Pour tout $n \geq 2$, on note S_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.
Pour tout $\sigma \in S_n$ et toute partie A de S_n, on notera $\sigma A := \{\sigma a \,,\, a \in A\}$.

1. Quel est le cardinal de S_n ?
2. On rappelle que la signature $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupe. Qu'est-ce que cela signifie ?
3. Montrer que les éléments de S_n de signature 1 forment un sous-groupe de S_n que l'on note A_n.
4. Montrer que tous les éléments de S_n qui sont des carrés (i.e. les $\sigma \in S_n$ tels qu'il existe $\tau \in S_n$ avec $\sigma = \tau^2$) appartiennent à A_n.
5. Expliciter un élément $\gamma \in S_n$ de signature -1.
6. Montrer que $A_n \cap \gamma A_n = \emptyset$.
7. Montrer que $S_n = A_n \cup \gamma A_n$ (union disjointe d'après la question précédente).
   [*Indication : on pourra utiliser que pour tout* $\sigma \in S_n$, $\sigma = \gamma\gamma^{-1}\sigma$.]
8. Déduire des deux questions précédentes et de la question 1 le cardinal de A_n.
9. On suppose que $n \geq 3$. Montrer que tout cycle d'ordre 3 est un carré.
10. Énumérer les cycles d'ordre 3 de A_4.
11. En déduire que A_4 possède au moins 8 éléments distincts qui sont des carrés, en plus de Id.
    Notons C l'ensemble des éléments de A_4 qui sont des carrés.
12. Déduire de ce qui précède que pour tout $\sigma \in A_4$, $\sigma C \cap C \neq \emptyset$.
13. Conclure que le sous-groupe engendré par C est A_4.

Exercice 2 Soit le polynôme $P(X) = (X+1)^5 - X^5 + c$ où c est un nombre réel.

1. Montrer que si $P(X)$ admet une racine double α, alors $(\alpha+1)^4 - \alpha^4 = 0$.
2. En déduire la valeur de α, puis de c, si α est une racine double *réelle* de $P(X)$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et soient u_k, $1 \leq k \leq n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout k, on définit

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

1. Calculer $\det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ en fonction de $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)$. On commencera par traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. En déduire la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Pouvez-vous généraliser le résultat de la question 2 ?