ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
S1 D'AUTOMNE
Epreuve : Algèbre 2 - Partiel 2
Date : vendredi 25 novembre
Heure : 9h-10h30
Lieu : Amphis Poincaré et Edison, A22
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Surveillants : Jonathan Harter et Manon Deville
Collège Sciences et technologies

Exercice 1 **(sur** 3 **points)**

On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, c et d sont des valeurs réelles. Pour quelles valeurs la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (sur 11 points)

On considère la matrice

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M_3 et les valeurs propres de M_3.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M_3.
3. Quels sont les sous-espaces caractéristiques de M_3 ? Quel est le polynôme minimal de M_3 ?
4. On considère un entier $n \geqslant 4$ et M_n la matrice carrée de taille n dont chaque coefficient vaut 1. La matrice M_n est-elle inversible ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M_n. On pourra utiliser le vecteur $(1, \dots, 1)$.
6. Soient $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des nombres complexes non nuls. On considère la matrice
$$A := (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$
et la matrice diagonale $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer $D^{-1}AD$ et en déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

Exercice 3 (sur 3 points)

Soit A une matrice carrée, réelle ou complexe.

1. Rappeler pourquoi A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $A - \lambda Id_n$ et $A + \lambda Id_n$ soient inversibles.
3. Montrer que A peut s'écrire comme la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 4 (sur 3 points)

On considère une matrice A dans $M_9(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^3 - 7A = -6I_3$. Montrer que A ne peut avoir au plus que 3 valeurs propres distinctes.