**ANNEE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018**
**S1 D'AUTOMNE**
**Epreuve : Algèbre 2 - DS 2**
**Date : Vendredi 24 Novembre 2017**
**Heure : 9h30-10h50 Durée : 1h20**
**Lieu : A33 Grand Amphi**
**Documents : non autorisés**
**Epreuve de M : Sueur**
**Surveillants : Alexandre Bailleul et Nikola Damjanovic**
**Collège Sciences et technologies**

La clarté de la présentation et des explications sera prise en compte dans l'évaluation.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question et de passer à la question suivante.

## **Exercice** 1

Pour des entiers naturels non nuls $n$ et $m$ on note $M_{m,n}$ la matrice

$$M_{m,n} := \begin{pmatrix} 0_{m,n} & I_m \\ I_n & 0_{n,m} \end{pmatrix},$$

où $0_{m,n}$ est la matrice nulle à $m$ lignes et $n$ colonnes , $I_m$ la matrice identité d'ordre $m$ etc...

1. Calculer $\det M_{1,n}$.
2. Pour $m \geqslant 2$, montrer que $\det M_{m,n} = (-1)^n \det M_{m-1,n}$.
3. En déduire la valeur de $\det M_{m,n}$ en fonction de $m$ et de $n$.

## **Exercice** 2

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de $A$ et les valeurs propres de $A$.
2. Déterminer le polynôme minimal $m_A(X)$ de $A$.
3. On note, pour $k \geqslant 2$ entier naturel, $R_k(X) = \alpha_k + \beta_k X + \gamma_k X^2$ le reste de la division euclidienne de $X^k$ par $P_A(X)$. Calculer $R_k(2), R_k(0)$ et $R'_k(0)$. En déduire $R_k$.
4. En déduire $A^k$, pour tout $k \geqslant 2$.

## **Exercice** 3

Soit $A$ une matrice antisymétrique réelle $n \times n$, c'est-à-dire telle que $A^t = -A$. On note $P_A$ le polynôme caractéristique de $A$. Comparer $P_A(X)$ et $P_A(-X)$.

## **Exercice** 4

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $f^4 = f^2$.

Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.