université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017** **S1 AUTOMNE** Parcours : L2 Code UE : 4TTI302U Epreuve : Algèbre 2 Date : 05/01/2017 Heure : 14h30-17h30 Lieux : AMPHI POINCARE et WEGENER Responsable de l'UE: Franck Sueur Surveillants : Christophe Bavard, Pierre Mounoud, Jean-Jacques Ruch, Franck Sueur Auteur épreuve : Rafik Imekraz Aucun document autorisé	**COLLEGE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier et notons U_n l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \quad z^n = 1\}$. On rappelle que l'on a

$$U_n := \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Card}(U_n) = n.$$

1) Montrer que U_n est un sous-groupe pour $\mathbb{C}^\star$ pour la loi de multiplication.

2) Prouver que U_n est cyclique (c'est-à-dire qu'il existe un élément de U_n dont le sous-groupe engendré est égal à U_n).

3) Soit $d \in \mathbb{N}^\star$, prouver que U_d est inclus dans U_n si et seulement si d divise n.

Exercice 2

Considérons $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et définissons le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Considérons maintenant un nombre rationnel de la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ et où p et q sont premiers entre eux. On suppose que $P(x) = 0$. Montrer que $q = \pm 1$ et que p divise c.

Exercice 3

Considérons la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A
2. Déterminer toutes les valeurs propres de A (on pourra chercher des racines simples du polynôme caractéristique ou se servir de la conclusion de l'exercice 2 même si ce dernier n'a pas été fait).
3. Déterminer les sous-espaces propres de A.
4. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?
5. Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice.
6. Calculer le polynôme minimal de A.

Exercice 4

Considérons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $b \neq c$. On se propose de calculer de deux façons différentes le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det M$ par une méthode directe de votre choix.

2) Pour tout réel t on note

$$M(t) = \begin{pmatrix} a+t & b+t & b+t \\ c+t & a+t & b+t \\ c+t & c+t & a+t \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det M(-b)$ et $\det M(-c)$.

3) En effectuant des opérations sur les lignes, prouver qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det M(t) = A + Bt.$$

4) En déduire les valeurs de A, B en fonction de (a, b, c) ?

5) Finalement, que vaut $\det M$ en fonction de (a, b, c) ?

Exercice 5

Dans la suite, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1) Rappeler la définition d'une matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $A^2 + A + I_n$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et que ses valeurs propres sont les nombres $\lambda_k^2 + \lambda_k + 1$ avec $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ et déterminer le cas d'égalité.

4) En utilisant une relation entre la trace et les valeurs propres, montrer que $\mathbf{tr}(A^2 + A + I) \geq \frac{3n}{4}$.

5) Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbf{tr}(A^2 + A + I) = \frac{3n}{4}$.