ANNEE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018
S1 D'AUTOMNE
Epreuve : Algèbre 2 - Examen final
Documents et calculatrice non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Collège Sciences et technologies
Lundi 8 Janvier 2018

Exercice 1

Remplir le tableau suivant (sur votre copie), pour les différents cas d'anneau A mentionnés dans la première colonne. On rappelle qu'un anneau $(A, +, *)$ est dit intègre si pour a et b dans A, $a * b = 0$ implique que $a = 0$ ou $b = 0$. On rappelle aussi que A^* désigne l'ensemble des éléments inversibles de A pour la multiplication.

A	commutatif	intègre	corps	A^*
$\mathbb{Z}$	*oui/non*	*oui/non*	*oui/non*	?
$\mathbb{Q}$	*oui/non*	*oui/non*	*oui/non*	?
$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$	*oui/non*	*oui/non*	*oui/non*	?
$M_{123}(\mathbb{C})$	*oui/non*	*oui/non*	*oui/non*	?
$\mathbb{C}[X]$	*oui/non*	*oui/non*	*oui/non*	?

Exercice 2

On considère les permutations

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 10 & 1 & 8 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Décomposer les permutations σ et $\tilde{\sigma}$ en cycles à supports disjoints et calculer les signatures respectives $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\tilde{\sigma})$ de σ et $\tilde{\sigma}$.

Exercice 3

On considère deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que $P(X)^2 + Q(X)^2 = (X^2+1)^2$.

1. Montrer que $\deg P \leqslant 2$ et $\deg Q \leqslant 2$.
2. Montrer que $X - i$ divise $P(X) + iQ(X)$ ou $P(X) - iQ(X)$.
3. On suppose que $X - i$ divise $P(X) + iQ(X)$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}$ tel que $P(X) + iQ(X) = \lambda(X-i)^2$. (Le carré ici n'est pas une faute de frappe !).
4. Montrer $|\lambda|^2 = 1$.
5. En déduire qu'il existe θ dans $]-\pi, \pi]$ tel que

$$P(X) = (\cos\theta)(X^2-1) + 2(\sin\theta)X, \tag{1}$$

$$Q(X) = (\sin\theta)(X^2-1) - 2(\cos\theta)X \tag{2}$$

Exercice 4

On considère le polynôme

$$P(X) := \det \begin{pmatrix} X & 2 & 3 & 4 \\ 2 & X & 3 & 4 \\ 2 & 3 & X & 4 \\ 2 & 3 & 4 & X \end{pmatrix}.$$

1. Sans calcul, montrer que 2 est racine de P.
2. Toujours sans calcul, déterminer deux autres racines de P.

3. Que dire du vecteur
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad ?$$
Factoriser P en produits de polynômes de degré 1.

Exercice 5

On considère la matrice
$$A := \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Quelles sont les valeurs propres ? La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Déterminer les sous-espaces propres associés.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

1. Montrer que $f(P) = AP - B(P + a)$ où $a \in K$ est le coefficient dominant de P.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique 1, X, X^2, X^3 de E.
3. Calculer le polynôme caractéristique.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?