université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Algèbre Linéaire 2** **Devoir Surveillé Terminal** **Date : 20/12/2018 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département DL Licence

Barème indicatif : $4 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4$

Exercice 1 Pour tout $n \geq 2$, on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pour la multiplication).

1. Montrer que $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement a est premier avec n.
   On suppose dorénavant que $n = 17$.
2. Quel est le cardinal (ou l'ordre) du groupe $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?
3. Quel est l'ordre de $\bar{2}$ dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?
4. Trouver un élément $\bar{b}$ de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ tel que $\bar{b}^2 = \bar{2}$.
5. En déduire que $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est cyclique (donner un générateur).

Exercice 2 Soient les deux polynômes $P(X) = X^4 - 8X^3 + 18X^2 - 27$ et $Q(X) = X^2 - 4X + 3$.

1. Calculer le pgcd de P et Q.
2. Comparer P'' et Q. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il a une racine triple.

Exercice 3 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & a & a & a \\ b & a & a & a \\ b & b & d & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \quad et \quad A(x) = \begin{pmatrix} c+x & a+x & a+x & a+x \\ b+x & a+x & a+x & a+x \\ b+x & b+x & d+x & a+x \\ b+x & b+x & b+x & b+x \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont fixés et x est un réel quelconque.

1. Montrer, sans la calculer explicitement, que la fonction $x \mapsto D(x) = \det A(x)$ est polynomiale, de degré au plus 1. *[On pourra faire des manipulations sur les colonnes ou les lignes de $A(x)$]*
2. Si $a = b$, montrer sans calcul que $\det A = 0$.
   On suppose dorénavant que $a \neq b$.
3. Montrer que $D(-a) = 0$ et $D(-b) = 0$. Qu'en déduit-on pour la fonction $D(x)$?
4. En déduire que $\det A = 0$.

Exercice 4

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à coefficients réels de degré impair, alors il admet au moins une racine réelle. *[Considérer la fonction polynomiale associée]*

   Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On suppose que f satisfait la relation $f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0$.
2. L'endomorphisme f peut-il avoir des valeurs propres réelles ?
3. Déduire de la question 1 que n est pair. Quel est le polynôme caractéristique de f ?

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $(A - 2\,I_3)^3 = 0$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire le polynôme caractéristique de f.
3. Quel est le polynôme minimal de f ?
4. Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f - 2\mathrm{Id})^2(w) \neq 0$.
   On note $v = (f - 2\mathrm{Id})(w)$ et $u = (f - 2\mathrm{Id})^2(w)$.
5. Prouver que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. *[On pourra commencer par appliquer l'endomorphisme $(f - 2\mathrm{Id})^2$ à une combinaison linéaire nulle]*
6. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 6 Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients *entiers*. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel $A^k = I_2$, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2. Le but de l'exercice est de montrer que $A^{12} = I_2$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont de module 1.
2. Montrer que si les valeurs propres de A sont réelles alors $A^2 = I_2$.
3. On suppose désormais que A admet une valeur propre non réelle λ. Montrer que les valeurs propres de A sont λ et sa conjuguée $\bar{\lambda}$.
4. En observant la trace de A, déterminer les valeurs possibles pour λ.
5. Montrer que dans tous les cas, $A^{12} = I_2$.