Quelques Théorèmes de Dualité en Arithmétique

LIANG, Yong Qi

2 juillet 2008

LIANG, Yong Qi
Chambre 1, Bâtiment 499,
Résidence universitaire la Pacaterie,
Université de Paris-Sud XI,
91400 Orsay Cedex,
France

Téléphone : (+33) (0)6 20 08 43 13
Email : yongqi.liang@u-psud.fr
(ou yongqi.liang@163.com)

Université de Paris-Sud XI, Orsay
Master Mathématiques Pures (ALGANT)

Mémoire de master 2

Quelques Théorèmes de Dualité en Arithmétique

LIANG, Yong Qi[1]

Directeur du mémoire : Prof. David HARARI

[1] financé par la bourse ALGANT du programme ERASMUS

Dédié à ma mère et mon père

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude la plus profonde envers mon directeur de mémoire David Harari, qui m'a guidé avec beaucoup de gentillesse. Je voudrais le remercier vivement pour sa grande patience, ainsi que pour ses explications très éclairantes et ses encouragements constants.

Je souhaite aussi remercier mes professeurs à Padoue(Padova) et à Paris pour leurs magnifiques cours qui m'ont ouvert au monde de l'arithmétique : L. Barbieri-Viale, B. Chiarellotto, J. -M. Fontaine, P. Colmez, L. Clozel, P. Gille, E. Ullmo et F. Baldassarri. Je remercie en particulier ce dernier, qui fut mon tuteur à Padoue pour la première année du programme ALGANT. Un remerciement supplémentaire pour Xu Fei, mon directeur en Chine qui m'a encouragé à aller étudier à l'étranger.

J'aimerais exprimer toute mon amitié à tous mes amis. Je remercie en particulier Zheng Weizhe pour son aide pour taper en français sous TeX et Ramla Abdellatif pour m'avoir souvent aidé à corriger mes erreurs et à résoudre mes problèmes avec la langue française, qui est difficile. Il me faut encore remercier Tang Shun, qui fut un colocataire très « utile » lors de mon année à Padoue.

Merci aussi aux secrétaires Elisa Aghito, Marianne Leclerc et Valérie Lavigne pour m'avoir aidé dans mes démarches administratives.

Enfin, sans la bourse ALGANT du programme ERASMUS dont j'ai bénéficié durant ces deux dernières années, je n'aurais probablement pas réussi à obtenir mon diplôme de Master en Europe. Par conséquent, je souhaite adresser un grand merci au programme ALGANT, à l'université de Padoue et à l'université de Paris-Sud XI.

Table des matières

Résumé

Dans ce manuscrit, quelques théorèmes de dualité en arithmétique sont discutés.

Dans la première partie sur la cohomologie galoisienne, nous montrons d'abord quelques théorèmes de dualité locale, et nous introduisons la suite exacte de Poitou-Tate sur la dualité globale. Quelques théorèmes de finitude des groupes de cohomologie sont montrés. Un théorème de dualité locale de Tate sur les variétés abéliennes est aussi montré comme application. Les formules de caractéristique d'Euler-Poincaré (local et global) sont discutées en détails.

Dans la deuxième partie sur la cohomologie étale, nous obtenons d'abord le théorème de dualité locale en traduisant celui-ci en termes de cohomologie galoisienne. Dans le cas global, nous étudions la cohomologie à support compact, et nous donnons une démonstration complète du théorème de dualité d'Artin-Verdier. La formule de caractéristique d'Euler-Poincaré est aussi discutée.

Les démonstrations suivent principalement celles du livre [19, MilneADT], nous référons aussi au livre [22, NSW], à l'article [5, Deninger1984] et au livre [11, Haberland] pour certaines démonstrations. Plus de détails sont expliqués, quelques fautes potentielles sont corrigées ; dans les notes de bas de page, quelques arguments dans ces livres qui ne sont peut être pas très clairs sont signalés. Il faut espérer que, dans ce manuscrit, tous les détails sont corrects et que les preuves sont complètes et plus claires.

Abstract

In this manuscript, some arithmetic duality theorems are discussed.

In the first part on Galois cohomology, we prove some local duality theorems and we introduce the exact sequence of Poitou-Tate on global duality. Some finiteness theorems on cohomology groups are also proved. A local duality theorem of Tate on abelian varieties is also proved as an application. The Euler-Poincaré characteristic (local and global) formulae are discussed in detail.

In the second part on étale cohomology, we first obtain the local duality theorem by translating that one in terms of Galois cohomology. In the global case, we study cohomology with compact support and give a complete proof of the Artin-Verdier duality theorem. The Euler-Poincaré characteristic formula is also discussed.

The proofs mainly follow those in [19, MilneADT], we also refer to [22, NSW], [5, Deninger1984] and [11, Haberland] for some proofs. More details are explained, some potential mistakes are corrected ; in the footnotes, some arguments which might not be so clear in the books are pointed out. Hopefully, in this manuscript, all the details are correct, the proofs are complete and clearer.

Introduction

L'histoire commence pendant les années cinquante. Le théorème de Tate de dualité entre $H^1(K, A^t)$ et $A(K)$ sur les variétés abéliennes pour un corps local (Corollaire 2.3.5) est le premier théorème de dualité en arithmétique. Pour le montrer, nous développons le théorème de dualité (2.2.1) et (2.2.2) pour un corps local. Afin de voir le théorème de dualité locale, on a besoin d'un théorème de dualité (2.1.1) pour une formation de classes, qui est montré par des méthodes d'algèbre homologique. La théorie du corps de classes local donne les informations sur l'application de réciprocité rec_K; comme la dimension cohomologique stricte du groupe de Galois d'un corps local est 2, nous obtenons des informations sur l'application $\alpha^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de dualité pour une formation de classes et trouvons la dualité locale. Nous avons aussi des résultats pour un corps local archimédien et pour un corps hensélien (Théorème 2.2.5 et Théorème 2.2.4). Pour un corps local, nous trouvons une formule magnifique de caractéristique d'Euler-Poincaré (2.2.6), dont la méthode de démonstration est due à Serre [31, SerreCohGal II.5] : quelques résultats de la théorie des représentations des groupes finis sont appliqués.

Sur la dualité globale, nous montrons le théorème sur la suite exacte de Poitou-Tate (2.4.8) annoncé par Tate au congrès international de mathématiques en Suède 1962 (cf. [35, Tate]), qui est prouvé indépendamment par Poitou et par Tate. Premièrement, nous développons la théorie du corps de classes global par rapport à l'extension K_S/K pour obtenir une P-formation de classes (G_S, C_S), nous trouvons alors une dualité. Ensuite, nous calculons les termes de la suite longue des Ext associée à la suite exacte $0 \to E_S \to J_S \to C_S \to 0$, et trouvons alors la suite de Poitou-Tate. Dans la suite de Poitou-Tate, l'application $\beta^1_S(K, M)$ est propre (Proposition 2.4.9), ce qui implique la finitude de $Ш^1_S(K, M)$. Pour voir la propreté, nous nous ramenons par la suite spectrale de Hochschild-Serre au cas simple, pour lequel nous pouvons calculer directement. La preuve de la propreté suit celle du livre [22, NSW] qui marche pour un corps de nombres et pour un corps de fonctions à la fois. La formule de caractéristique d'Euler-Poincaré (2.4.20) est aussi énoncée. Sa démonstration est similaire au cas local, nous suivons la preuve du livre [11, Haberland].

Ensuite, nous commençons à étudier les théorèmes de dualité en arithmétique en cohomologie étale. Nous étudions la cohomologie d'un anneau local hensélien ; combinant les informations du point générique et du point fermé, nous trouvons une dualité locale (3.1.9).

Pour la dualité globale, premièrement, nous définissons les groupes de cohomologie à support compact tels qu'ils satisfassent une suite exacte $\cdots \to H^r_c(U,\mathcal{F}) \to H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v,\mathcal{F}_v) \to H^{r+1}_c(U,\mathcal{F}) \to \cdots$. Deuxièmement, nous calculons les groupes de cohomologie de $\mathbb{G}_m$, qui nous donnent des objets importants de la théorie algébrique des nombres, par exemple, le groupe des classes d'idéaux, le groupe des unités, etc.. Trouvant une identification (3.2.12) des groupes de cohomologie galoisienne avec les groupes de cohomologie étale considérés, cela nous donne finalement la finitude des groupes de cohomologie étale considérés et la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré (3.2.17). Enfin, nous énonçons et démontrons le théorème de dualité d'Artin-Verdier (3.3.1) annoncé par Artin et Verdier (1964). Il y a une démonstration dans l'article [17, Mazur][2] pour un corps de nombres totalement imaginaire, peut-être la preuve du livre [19, MilneADT] est la première preuve publiée, pour le cas d'un corps de fonctions une preuve est exposée dans l'article [5, Deninger1984]. La stratégie de la démonstration est la suivante : nous nous ramenons pas à pas au cas simple, nous fabriquons une machine pour faire la récurrence ; par calculs directs et récurrence nous prouvons le cas simple, qui marche bien avec l'hypothèse $car(K) \nmid [\mathcal{F}_{\bar{\eta}}]$. Afin de conclure nous utilisons un argument supplémentaire d'Artin-Schreier pour le cas d'un corps de fonctions.

[2] Malheureusement, une léger inexactitude est signalé dans l'article [5, Deninger1984].

Chapitre 1

Préliminaires

Beaucoup de préliminaires sont exposés, qui seront souvent appliqués dans les chapitres suivants.

Certains d'entre eux, pour lesquels il n'est pas facile de trouver une référence, sont montrés en détails, par exemple la proposition 1.7.3 et ses corollaires. Les résultats sans démonstration font partie de théories classiques, pour lesquelles les références sont données, par exemple la théorie du corps de classes.

La théorie du corps de classes, la théorie de la cohomologie des groupes (pour le chapitre 2) et la théorie de la cohomologie étale élémentaire (pour le chapitre 3) sont nécessaire pour comprendre les démonstrations des théorèmes de dualité en arithmétique.

Notations

Dans ce mémoire, les notations usuelles sont les suivantes.

On note $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres rationnels, entiers et entiers positifs.

Pour un groupe G, on note $[G]$ son ordre si c'est fini, et $[G : H]$ l'indice d'un sous-groupe H.

Pour un groupe abélien M, on note M_m et $M^{(m)}$ les groupes satisfaisant à la suite exacte

$$0 \to M_m \to M \xrightarrow{m} M \to M^{(m)} \to 0.$$

On note, pour un premier l, $M(l)$ la réunion des M_{l^n} dans M pour $n \geqslant 1$, c'est un sous-groupe de M. On note aussi M_t le sous-groupe de torsion de M.

Pour un corps K, on fixe K^s sa clôture séparable et on note G_K le groupe de Galois absolu $Gal(K^s/K)$.

1.1 Complété profini, dualité

Complété profini

Nous discutons la notion de complété profini. Nous supposons que tout groupe topologique G est muni d'une base de voisinages de 1_G qui se composent de sous-groupes ouverts, tous les groupes topologiques qui nous intéressent vérifient cette hypothèse.

Définition 1.1.1. Soit G un groupe topologique, les sous-groupes ouverts d'indice fini donnent la *topologie profinie associée*. On définit $\widehat{G} = \varprojlim_{N_{ouvert} \lhd G, [G:N]<\infty} G/N$ le *complété profini* de G.

Attention. Dans ce mémoire, $\widehat{\ }$ note le complété profini, mais pas le complété par rapport à la topologie originale du groupe considéré. Exception : si K est un corps hensélien, $\widehat{K}$ est le complété adique (i.e. par rapport à la topologie originale de K).

Définition 1.1.2. On dit que $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorphisme continu de groupes topologiques est *strict*, si pour tout ouvert U de G, l'image $\varphi(U)$ est un ouvert de $im(\varphi)$ muni de la topologie induite par G_2.

Si φ est injectif, c'est strict si et seulement si $G_1 \subseteq G_2$ est muni de la topologie induite par G_2. Si φ est surjectif, c'est strict si et seulement si G_2 est muni de la topologie quotient de G_1.

Si $\varphi : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme continu, c'est encore continu pour les topologies profinies associées. Mais en général, si φ est strict, on ne peut pas déduire que c'est encore strict pour les topologies profinies associées.

Étant donnée une suite exacte de groupes topologiques $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ avec des homomorphismes stricts, si l'on complète tous les termes par rapport aux topologies originales, la suite obtenue sera aussi exacte car tous les homomorphismes sont stricts (cf.[2, Atiyah]). Mais si l'on prend les complétés profinis(i.e. on complète par rapport aux topologies profinies associées), la suite ne sera pas forcément exacte, parce que pour les topologies profinies, les homomorphismes ne seront pas stricts (donc on ne peut pas appliquer [2, Atiyah]) même s'ils le sont pour les topologies originales.[1]

On a les résultats suivants.

Proposition 1.1.3. *Soit une suite de groupes topologiques $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ exacte en B avec φ, ψ stricts. On suppose*

(1)im(ψ) est fermé dans C et $C/im(\psi)$ est totalement discontinu ;

(2)C est Hausdorff localement compact et engendré compactement(i.e. engendré algébriquement par un sous-ensemble compact). Alors la suite $\widehat{A} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{C}$ est encore exacte.

Démonstration. On combine [19, MilneADT I.0.20(b)] et de [12, Harari Appendice]. □

Corollaire 1.1.4. *Soit $\cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} A_i \xrightarrow{\varphi_i} A_{i+1} \to \cdots$ une suite exacte de groupes Hausdorff localement compacts totalement discontinus et engendrés compactement, alors la suite $\cdots \to \widehat{A}_{i-1} \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{i-1}} \widehat{A}_i \xrightarrow{\widehat{\varphi_i}} \widehat{A_{i+1}} \to \cdots$ est encore exacte.*

Démonstration. Les homomorphismes sont automatiquement stricts d'images fermées avec co-noyaux totalement discontinus si tous les groupes sont Hausdorff localement compacts totalement discontinus et engendrés compactement. □

Exemple 1.1.5. Complétant profiniment la suite exacte de groupes discrets $0 \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, on obtient la suite $0 \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to 0 \to 0 \to 0$, qui n'est plus exacte, parce que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ n'est pas engendré compactement(i.e. engendré par un sous-ensemble fini dans ce cas).

[1] Dans [19, MilneADT], on ne peut pas appliquer la proposition I.0.20 pour obtenir l'exactitude de la suite avec les complétés profinis.

Dualité des groupes topologiques abéliens

Dans ce mémoire, on note $G^* = Hom_{cts}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le *groupe dual* du groupe topologique abélien G, où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète.

Le groupe $Hom_{cts}(G, S)$, muni de la *topologie compact-ouvert* s'appelle le *groupe dual de Pontryagin*, où S est le groupe topologique $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On peut vérifier facilement que $G^* = Hom_{cts}(G, S)$ dans les cas suivants,

(1)G est discret de torsion ;

(2)G est profini.

Alors dans ces cas, on a la dualité de Pontryagin, $G \simeq G^{**}$, G^* est profini (resp. discret de torsion) si et seulement si G est discret de torsion (resp. profini).

Proposition 1.1.6. *Soit la suite de groupes topologiques $G' \to G \to G''$ exacte en G. Si G, G' et G'' sont profinis ou discrets, alors la suite $G''^* \to G^* \to G'^*$ est encore exacte en G^*.*

Démonstration. Pour le cas profini, on applique le fait que toute bijection continue entre espaces compacts Hausdorff est toujours un homéomorphisme. Pour le cas discret, on sait que $G^* = Hom_{cts}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et que $Hom(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un foncteur exact car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible donc c'est un $\mathbb{Z}$-module injectif. □

On va appliquer souvent cette proposition sur une suite exacte longue de groupes de cohomologie. Par exemple, la cohomologie des groupes profinis $H^r(G, M)$ est discrète de torsion si $r \geqslant 1$(cf. 1.2.2).

1.2 Algèbre homologique

Extension et cohomologie

Définition 1.2.1. Soit G un groupe profini, on dit qu'un G-module M est *un G-module discret* si $\bigcup_{U_{ouvert} \leqslant G} M^U = M$.

Soit G un groupe profini, si M est un G-module discret, c'est de type fini sur $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il est engendré par un certain sous-ensemble fini comme G-module, dans ce cas, on dit simplement M est *de type fini*.

Pour tout G-module M, le G-module $\bigcup_{U_{ouvert} \leqslant G} M^U$ est toujours discret. Soient M et N deux G-modules, $Hom(M, N)$ est un G-module par l'action conjuguée (i.e. ${}^{\sigma}f(m) = \sigma(f(\sigma^{-1}m)), \forall m \in M, \forall \sigma \in G$ *et* $\forall f \in$

$Hom(M,N)$,) mais ce n'est pas en général un G-module discret même si M et N le sont. On note $\mathcal{H}om_H(M,N) = \bigcup_{H \leqslant U_{ouvert} \leqslant G} Hom(M,N)^U$ pour un sous-groupe distingué fermé H de G, alors $\mathcal{H}om_H(M,N)$ est un G/H-module discret, et on peut définir $\mathcal{E}xt_H(M,-)$ le r^{ime} foncteur dérivé à droite de $\mathcal{H}om_H(M,-)$. Si M et N sont deux G-modules discrets et on suppose que M est de type fini, alors $\mathcal{E}xt_H(M,N) = Ext_H(M,N)$, en particulier, $Hom(M,N) = \mathcal{H}om(M,N)$ est un G-module discret.

Pour un groupe profini G et un G-module discret M, on définit le groupe de cohomologie $H^r(G,-)$ le r^{ime} foncteur dérivé à droite du foncteur $Hom_G(\mathbb{Z},-) = Hom(\mathbb{Z},-)^G$, i.e. $H^r(G,M) = Ext^r_G(\mathbb{Z},M)$. On peut aussi les définir par une résolution projective explicite non-homogène (les co-cycles, les co-bords, etc. (cf. [28, SerreCorpsLoc VII])).

Tout accouplement bi-linéaire des G-modules discrets $M \times N \to P$ induit un accouplement qui s'appelle *cup-produit*

$$H^r(G,M) \times H^s(G,N) \xrightarrow{\cup} H^{r+s}(G,P).$$

Lemme 1.2.2. *Soit G un groupe profini, et soit M un G-module discret. Alors $H^r(G,M)$ est de torsion si $r \geqslant 1$, c'est fini si G est fini et M est de type fini.*

Démonstration. En effet, pour $r \geqslant 1$ on peut écrire $H^r(G,M)$ comme la limite inductive de cohomologies de groupes finis, chaque terme est fini (on considère Res et Cores), la limite est de torsion, cf. [31, SerreCohGal I.2.2]. Si G est fini et M est de type fini, d'après la résolution non-homogène explicite, les cohomologies sont de type fini sur $\mathbb{Z}$, donc sont finis. □

Lemme 1.2.3. *Soit H un sous-groupe distingué ouvert de G, alors pour tout H-module discret N, $Hom(\mathbb{Z}[G/H],N) \simeq \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N$ est un G-module discret, et on a*

$$H^r(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \simeq H^r(H,N)$$

et $$Ext^r_G(Hom(\mathbb{Z}[G/H],N),P) \simeq Ext^r_H(N,P).$$

Démonstration. La première assertion est connue d'après Shapiro, la dernière peut être montrée de la même méthode que la démonstration du lemme de Shapiro. □

Proposition 1.2.4. *Soit H un sous-groupes distingué fermé de G, et soient N et P deux G-module discrets. Alors pour tout G/H-module discret M tel que $Tor^{\mathbb{Z}}_r(M,N) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$, il y a une suite spectrale*

$$Ext^r_{G/H}(M, \mathcal{E}xt^s_H(N,P)) \Rightarrow Ext^{r+s}_G(M \otimes_{\mathbb{Z}} N, P).$$

Démonstration. En effet, c'est une suite spectrale de la composition de deux foncteur (cf. [8, GrothendieckTôhoku 2.4]), pour une démonstration complète on peut voir [19, MilneADT I.0.3]. □

Corollaire 1.2.5 (la suite spectrale de Hochschild-Serre). *Soit H un sous-groupes distingué fermé de G, alors pour tout G-module discret M, on a une suite spectrale*

$$H^r(G/H, H^s(H,M)) \Rightarrow H^{r+s}(G,M).$$

Corollaire 1.2.6. *Soient M et N deux G-modules discrets, on a une suite spectrale*

$$H^r(G, \mathcal{E}xt^s(M,N)) \Rightarrow Ext_G^{r+s}(M,N).$$

Lorsque M est de type fini, il y a une suite exacte

$$0 \to H^1(G, Hom(M,N)) \to Ext^1_G(M,N) \to$$
$$H^0(G, Ext^1(M,N)) \to H^2(G, Hom(M,N)) \to \cdots .$$

De plus, si N est divisible par tout premier qui est l'ordre d'un élément de M, alors $Ext^r(M,N) = 0$, $\forall r \geqslant 1$, on a donc $H^r(G, Hom(M,N)) = Ext^r_G(M,N)$ pour tout entier r.

Démonstration. La suite exacte vient de la théorie standard des suites spectrales. Pour montrer l'assertion $Ext^r(M,N) = 0$, $\forall r \geqslant 1$, on se ramène au cas $M = \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}$ avec N p-divisible car $Ext^r(\mathbb{Z},N) = 0$, $\forall r \geqslant 1$. On note que N divisible par p^t implique que $Hom(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{p^t} Hom(\mathbb{Z},N)$ est surjective. D'après la suite exacte longue de $Ext^*(-,N)$ appliqué à $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p^t} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z} \to 0$, on obtient $Ext^r(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}, N) = 0$ $\forall r \geqslant 1$. □

Cohomologie de Tate

Soit G un groupe fini, et soit M un G-module discret. On note I le noyau de l'augmentation $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$

Dualement, on définit $H_r(G,-)$ le r^{ime} foncteur dérivé à gauche du foncteur $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} - = (M \mapsto M/IM)$, i.e. $H_r(G,M) = Tor_r^G(\mathbb{Z},M)$.

On définit l'application *norme* $N = \sum_{\sigma \in G} \sigma : M \to M$. Notant que $IM \subseteq ker(N)$ et $im(N) \subseteq M^G$, on déduit une application $\widetilde{N}$ satisfaisant

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[r, "N"] \arrow[d, two heads] & M & & \\
0 \arrow[r] & ker(\widetilde{N}) \arrow[r] & M/IM \arrow[r, "\widetilde{N}"] \arrow[d, equal] & M^G \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d, equal] & coker(\widetilde{N}) \arrow[r] & 0 \\
 & & H_0(G,M) & H^0(G,M) & &
\end{tikzcd}$$

Alors $ker(\widetilde{N}) = ker(N)/IM$ et $coker(\widetilde{N}) = M^G/NM$. On définit la *cohomologie de Tate*

$$H_T^n(G,M) = \begin{cases} H^n(G,M), & n \geqslant 1 \\ M^G/NM, & n = 0 \\ ker(N)/IM, & n = -1 \\ H_{-n-1}(G,M), & n < -1 \end{cases}$$

et on obtient une suite exacte longue

$$\cdots \to H_T^r(G,M') \to H_T^r(G,M) \to H_T^r(G,M'') \to H_T^{r+1}(G,M') \to \cdot \forall r \in \mathbb{Z}$$

pour chaque suite exacte courte de G-modules discrets $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Si G est cyclique, les H^* sont de période 2, i.e. $H_T^r(G,M) \simeq H_T^{r+2}(G,M)$. Si G est cyclique et on suppose que $H_T^0(G,M)$ et $H_T^1(G,M)$ sont finis, on définit le quotient de Herbrand $h(M) = \frac{[H^0(G,M)]}{[H^1(G,M)]}$. On sait que pour tout M fini, $h(M) = 1$ (cf.[28, SerreCorpsLoc]).

Accouplement de Yoneda

Soient M, N et P des G-modules, on peut définir l'*accouplement de Yoneda*

$$Ext_G^r(M,N) \times Ext_G^s(P,M) \to Ext_G^{r+s}(P,N)$$

de beaucoup de manières, par exemple, on regarde $Ext_G^s(P,M)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des extension à s-feuilles de P par M, on fixe une extension à s-feuilles de P par M, et on déploie cette suite exacte comme les suites exactes courtes, ensuite on obtient les s applications de bord, on les compose, et donc on obtient une application $Ext_G^r(M,N) \to Ext_G^{r+s}(P,N)$ pour chaque extension à s-feuilles de P par M, cet homomorphisme ne dépend que de la classe d'équivalence de l'extension fixée. On définit donc l'accouplement.

En particulier, on prend $P = \mathbb{Z}$, si M et N sont des G-modules discrets, alors $Ext_G^s(P,M) = H^s(G,M)$ et $Ext_G^{r+s}(P,N) = H^{r+s}(G,N)$, on obtient l'accouplement

$$Ext_G^r(M,N) \times H^s(G,M) \to H^{r+s}(G,N)$$

Soit $M \times N \to P$ un accouplement des G-modules discrets. Il induit une application $M \to \mathcal{H}om(N,P)$, donc $H^r(G,M) \to H^r(G,\mathcal{H}om(N,P)) \to$

$Ext^r_G(N,P)$, où la dernière application vient de la suite spectrale. On sait que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} H^r(G,M) \arrow[d] & \times & H^s(G,N) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, equal] & H^{r+s}(G,P) \arrow[d, equal] \\ Ext^r_G(N,P) & \times & H^s(G,N) \arrow[r, "Yoneda"] & H^{r+s}(G,P) \end{tikzcd}$$

1.3 Formation de classes

Définition 1.3.1. Soient G un groupe profini et C un G-module discret, une famille d'isomorphismes

$$inv_U : H^2(U,C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

indexés par les sous-groupes ouverts U de G est dite une *formation de classes* si

(1)pour tout sous-groupe ouvert $U \subseteq G$, $H^1(U,C) = 0$, et

(2)pour toute paire de sous-groupes ouverts $V \subseteq U \subseteq G$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^2(U,C) \arrow[r, "Res_{V,U}"] \arrow[d, "inv_U"', "\simeq"] & H^2(V,C) \arrow[d, "inv_V"', "\simeq"] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

commute avec $n = [U : V]$.

Si V est un sous-groupe distingué de U d'indice n, les conditions impliquent le diagramme suivant avec les lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(U/V,C^V) \arrow[r, "Inf"] \arrow[d, "inv_{U/V}"', "\simeq"] & H^2(U,C) \arrow[r, "Res_{V,U}"] \arrow[d, "inv_U"', "\simeq"] & H^2(V,C) \arrow[r] \arrow[d, "inv_V"', "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $inv_{U/V}$ est définit comme la restriction de inv_U. En particulier, on a pour tout sous-groupe U de G, un isomorphisme

$$inv_{G/U} : H^2(G/U,C^U) \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},$$

on note $u_{G/U}$ l'élément de $H^2(G/U,C^U)$ envoyé sur $1/n$.

Lemme 1.3.2 (Tate-Nakayama). *Soit M un G-module discret tel que $Tor_1^{\mathbb{Z}}(M,C)=0$. Alors, l'application*

$$H_T^r(G/U,M) \to H_T^{r+2}(G/U, M\otimes_{\mathbb{Z}} C^U)$$

$$a \mapsto a \cup u_{G/U}$$

est un isomorphisme pour tous les sous-groupes distingués ouverts U de G et tous les entiers r.

Démonstration. cf. [28, SerreCorpsLoc IX.8] □

Théorème 1.3.3. *Soit (G,C) une formation de classes, alors il y a une application canonique $rec_G : C^G \to G^{ab}$ dont l'image est dense et dont le noyau est $\cap N_{G/U}C^U$. Le noyau s'appelle le groupe des normes universelles.*

Démonstration. On applique le lemme de Tate-Nakayama pour $M=\mathbb{Z}$ et $r=-2$. Pour en savoir plus, cf. [28, SerreCoprsLoc XI]. □

Remarque 1.3.4. On remarque que le cup-produit

$$H^0(G,C)\times H^2(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^2(G,C)$$

s'identifie à l'accouplement

$$<\ ,\ >: C^G \times Hom_{cts}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

l'application rec_G est déterminée par l'équation

$$<c,\chi> = \chi(rec_G(c)),\ \forall c\in C^G,\ \chi\in Hom_{cts}(G^{ab},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Remarque 1.3.5. Notre définition de la formation de classes est un peu plus forte que celle usuelle au sens de [1, Artin-Tate]. Au sens usuel on demande seulement que les applications inv_U soient injectives, induisant des isomorphismes $H^2(U/V,C^V)\to [U:V]^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ pour tous sous-groupes distingués ouverts V de U. Notre définition est équivalente à la définition usuelle plus la condition que l'ordre de G (comme groupe profini) soit divisible par tous les entiers non-nuls. Par exemple, le groupe de Galois absolu G d'un corps global a un sous-quotient égal à $Gal(k^s/k)\simeq\hat{\mathbb{Z}}$, où k est un certain corps résiduel du corps global, donc l'ordre de G est divisible par tous les entiers non-nulle.

Définition 1.3.6. Soit P un ensemble de nombres premiers. On dit que (G, C, inv_U) est une *P-formation de classes*, remplaçant la condition « inv_U soit un isomorphisme » dans la définition précédente par les conditions suivantes,

inv_U soit injective pour chaque sous-groupe ouvert U de G, tel que

(a)pour toute paire de sous-groupes ouverts $V \subseteq U \subseteq G$ avec V distingué dans U, l'application $inv_{U/V} : H^2(U/V, C^V) \to [U : V]^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ induite par inv_U soit un isomorphisme.

(b)pour tous sous-groupes ouverts U de G et $l \in P$, la partie l-primaire $H^2(U, C)(l) \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(l)$ induit par inv_U soit un isomorphisme.

Remarque 1.3.7. (1)La condition (b) est équivalent à dire que pour tous $l \in P$, l'ordre de G soit divisible par l^∞.

(2)Si (G, C) est une formation de classes, et H est un sous-groupe ouvert distingué de G, alors $(G/H, C^H)$ est une P-formation de classes avec $P = \{l; l^\infty \mid [G/H]\}$

(3)Si $P = \{\textit{tous les premiers}\}$, la notion de P-formation de classes est exactement la notion de formation de classes en notre sens ; si $P = \emptyset$, la notion de P-formation de classes est exactement la notion de formation de classes au sens usuel.

Exemple 1.3.8. (a)Soit G un groupe profini isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$ qui agit trivialement sur $C = \mathbb{Z}$. Il existe un sous-groupe ouvert d'indice m unique U de G pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si l'on fixe un générateur topologique σ de $\widehat{\mathbb{Z}}$, on a $U = \overline{<\sigma^m>}$ et un isomorphismes des groupes topologiques $Hom_{cts}(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}; f \mapsto f(\sigma^m)$. D'après la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, on définit $inv_U : H^2(U, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ comme l'application satisfaisant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 = H^1(U,\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^1(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & H^2(U,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[ddl, "inv_U"] & H^2(U,\mathbb{Q}) = 0 \\
& Hom_{cts}(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "\simeq"] & & \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

Clairement, $(G, C) = (\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ est une formation de classes.

(b)Soit K un corps local non-archimédien. On note le groupe de Galois absolu $G = Gal(K^s/K)$ et $C = K^*$. Le groupe d'inertie $I = Gal(K^s/K^{nr})$, où K^{nr} est l'extension maximale non-ramifiée de K dans K^s. Alors $G/I \simeq Gal(k^s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$, où k est le corps résiduel. On prend $\sigma = Frob$ l'élément de Frobenius dans la situation (a).

On définit inv_G par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(G/I, K^{nr*}) \arrow[r, "Inf", "\simeq"'] \arrow[d, "ord"', "\simeq"] & H^2(G, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[ddl, "inv_G"] & Br(K^{nr}) = 0 \\ & H^2(G/I, \mathbb{Z}) \arrow[d, "inv_{G/I}"', "\simeq"] & & \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & \end{tikzcd}$$

Pour voir l'exactitude de la ligne cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6] avec le théorème de Hilbert 90. $Br(K^{nr}) = H^2(Gal(K^s/K^{nr}), K^{s*}) = 0$ vient du fait que toute algèbre centrale simple est déployée par une extension finie non-ramifiée, cf. [28, SerreCorpsLoc]. Lorsque une uniformisante de K^{nr} est fixée, on a une section de l'application $ord : K^{nr*} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, alors $K^{nr} \simeq \mathcal{O}^{nr\times} \times \mathbb{Z}$ comme les G/I-modules discrets, or on sait que la cohomologie du groupe des unités est trivial (cf. [27, SerreLCFT 1.2]), alors l'application ord au niveau de la cohomologie est un isomorphisme notant que les cohomologies commutent avec la somme directe. Enfin, l'isomorphisme $inv_{G/I}$ vient de (a).

On peut aussi définir inv_U pour tout sous-groupe ouvert U de G, et on obtient une formation de classes (G_K, K^*). L'application d'Artin rec_K est injective avec l'image dense, voir la section suivante cf.1.4.1.

(c)Soit K un corps global, on note $G = G_K = Gal(K^s/K)$ et $C = \varinjlim C_L$ où C_L est le groupe des classes d'idèles de L, où L est une extension finie séparable de K. Soit v une place de K, on note K_v le complété par rapport à $| \ |_v$, alors $G_v = Gal(K_v^s/K_v)$ est isomorphe au groupe de décomposition un sous-groupe fermé de G_K.

On sait qu'il y a un unique isomorphisme $inv_G : H^2(G, C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui commute avec tous les inv_v locaux

$$\begin{tikzcd} H^2(G, C) \arrow[r, "inv_G"] \arrow[d] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ H^2(G_v, K_v^{s\times}) \arrow[r, "inv_v"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Le inv_v est défini dans (b) s'il est non-archimédien. Sinon, le inv_v est une injection avec l'image $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ ou $0\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

On peut aussi définir inv_U pour tout sous-groupe ouvert U de G, on obtient alors une formation de classes (G_K, C). L'application d'Artin rec_K est surjective avec noyau divisible si K est un corps de nombres ; rec_K est injective avec co-noyau uniquement divisible si K est un corps de fonctions, voir la section suivante 1.4.2.

1.4 Théorie du corps de classes

Théorie du corps de classes local

Soit K un corps local non-archimédien, c'est-à-dire que c'est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_{p^r}((T))$. Soit G le groupe de Galois absolu de K. La théorie du corps de classes local dit que (G, K^*) est un formation de classes, alors on a une application naturelle $rec_K : K^* \to G^{ab}$.

Théorème 1.4.1. *(1)L'application rec_K est fonctorielle en K, injective, son image est dense, son co-noyau est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$, en particulier $coker(rec_K)$ est uniquement divisible.*

(2)Elle est un isomorphisme au niveau fini, et induit un isomorphisme des groupes profinis $\widehat{K}^*$ et G^{ab}, où $\widehat{K}^*$ est le complété profini de K^*, où K^* est muni de la topologie défini par la valuation sur K.

(3)Les ouverts d'indice fini de K^* sont de la forme $Nm_{L/K}L^*$ avec L une extension abélienne finie de K.

(4)Le sous-corps K^{ab} de K^s fixé par G^{ab} est la composition des sous-corps K^{nr} et K_π, où K^{nr} est l'extension maximale non-ramifiée de K (qui est canonique), et K_π est une extension totalement ramifiée de K (qui dépend du choix de l'uniformisant π de K).

(5)L'image de π agit sur K^{nr} comme l'action de Frobenius.

Démonstration. Pour en savoir plus, cf.[1, Artin-Tate] ou [28, SerreCorpsLoc],[27, SerreLCFT]. □

Théorie du corps de classes global

On considère un corps global K(une extension finie séparable de $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_q(T)$), on note J_K le groupe des idèles de K et $C_K = J_K/K^*$ le groupe des classes d'idèles, ce sont des groupes topologiques. Soit G le groupe de Galois absolu de K, qui agit naturellement sur C_K, on obtient un G-module discret. La théorie du corps de classes global dit que (G, C_K) est une formation de classes, alors on a une application naturelle $rec_K : C_K \to G^{ab}$.

Théorème 1.4.2. *(1)L'application rec_K est fonctorielle en K, son image est dense. C'est aussi compatible avec les rec_{K_v} qui viennent de la théorie du corps de classes local.*

(1.1)Dans le cas d'un corps de nombres, l'application rec_K est surjective avec noyau la composant connexe neutre de C_K, le noyau est un groupe divisible ;

(1.2)Dans le cas d'un corps de fonctions, l'application rec_K *est injective avec co-noyau isomorphe à* $\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$*, en particulier* $coker(rec_K)$ *est uniquement divisible.*

(2)C'est un isomorphisme au niveau fini, et induit un isomorphisme des groupes profinis $\widehat{C_K}$ *et* G^{ab}*, où* $\widehat{C_K}$ *est le complété profini de* C_K*.*

(3)Les ouverts d'indice fini de C_K *sont de la forme* $Nm_{L/K}C_L$ *avec* L *une extension abélienne finie de* K*.*

Démonstration. Pour en savoir plus, cf.[1, Artin-Tate] ou [36, Tate]. On peut aussi développer la théorie dans le langage du groupe des classes d'idéaux, c'est utile parfois. On note encore que la théorie du corps de classes pour les corps global de fonctions est similaire à celle pour les corps locaux. □

1.5 Dimension cohomologique stricte

Nous discutons les corps qui sont de dimension cohomologique stricte 2, c'est important pour les théorèmes de dualité en arithmétique.

Soit p un nombre premier, et soit G un groupe profini.

Définition 1.5.1. On dit que G est de *p-dimension cohomologique* (resp. *p-dimension cohomologique stricte*) n, et on note $cd_p(G) = n$ (resp. $scd_p(G) = n$), si n est le plus petit entier vérifiant la condition suivante :
Pour tout G-module discret de torsion (resp. G-module discret) M, et tout $q > n$, la composante p-primaire de $H^q(G, M)$ est nulle.

Définition 1.5.2. On appelle $cd(G)$=sup$\{cd_p(G)\,;\, p$ est premier$\}$ (resp. $scd(G)$=sup$\{scd_p(G)\,;\, p$ est premier$\}$) la *dimension cohomologique* (resp. *dimension cohomologique stricte*) de G.

Remarque 1.5.3. Il est possible que la (p-)dimension cohomologique (stricte) soit infinie.

Soit K un corps, G_K le groupe de Galois absolu.

Théorème 1.5.4. *La dimension cohomologique stricte* $scd(G_K) = 2$ *si*

(i) K *est un corps fini, dans ce cas* $cd(G_K) = 1$ *;*

(ii)K *est un corps local ;*

(iii)K *est un corps de fonctions dont le corps résiduel est fini ;*

(iv)K *est un corps de nombres totalement imaginaire ;*

(v)K *est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète Hensélien excellent.*

Démonstration. (i)cf. [28, SerreCorpsLoc] ;

(ii)cf. [28, SerreCorpsLoc] ;

(iii)cf. [22, NSW] ;

(iv)cf. [22, NSW I.10.2.3] ;

(v)D'après [19, MilneADT I.A.6], on a $G_K = G_{\widehat{K}}$ où $\widehat{K}$ est le complété de K, c'est un corps local, alors on conclut d'après (ii).

Pour en savoir plus, voir [22, NSW], ou bien une autre manière de démonstration dans [3, Brumer]. On remarque que si $scd(G_K) = 2$, on a $H^3(G_K, \mathbb{Z}) = 0$ □

Remarque 1.5.5. Soit K un corps de nombres, et soit S un ensemble de places de K, on note K_S l'extension maximale non-ramifiée en dehors de S de K et $G_S = Gal(K_S/K)$. L'assertion de Tate dans son exposé [35, Tate] que $scd(G_S) = 2$ n'a pas été montrée encore.

1.6 Groupes algébriques de type multiplicatif

Soit K un corps, G un groupe algébrique sur K.

Définition 1.6.1. On dit que G est *de type multiplicatif* si $G_{K^s} = G \times_{Spec(K)} Spec(K^s)$ est diagonalisable. C'est un K-*tore* si G est connexe. (cf. [37, Waterhouse])

Théorème 1.6.2. *Le foncteur $G \mapsto X^*(G) = Hom_{K^s-gpe.alg}(G_{K^s}, \mathbb{G}_m)$ se donne une équivalence de catégories entre la catégorie des K-groupes algébriques de type multiplicatif (resp. finis de type multiplicatif) et la catégorie des $Gal(K^s/K)$-modules discrets de type fini (resp. finis).*

De plus, dans ce cas, pour L extension séparable de K, l'ensemble des L-points rationnels $G(L) = Hom_{Gal(K^s/L)}(X^*(G), K^{s*})$.

Démonstration. On remarque que le quasi-inverse est donné par $M \mapsto Spec((K^s[M])^{Gal(K^s/K)})$, où $K^s[M]$ est l'algèbre de groupe pour le $Gal(K^s/K)$-module discret M vu comme un groupe abélien. Pour en savoir plus, cf.[37, Waterhouse]. □

Théorème 1.6.3. *Le foncteur $G \mapsto G(K^s)$ se donne une équivalence des catégories entre la catégorie des K-groupes algébriques finis étales (resp. finis étales abéliens) et la catégorie des groupes finis avec l'action continue de $Gal(K^s/K)$ (resp. $Gal(K^s/K)$-modules discrets finis)*

Démonstration. On peut voir [37, Waterhouse]. □

Remarque 1.6.4. En caractéristique $p \neq 0$, il y a groupes algébriques finis (alors affines) qui ne sont pas de type multiplicatif ou ne sont pas étale, par exemple $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est étales mais n'est pas de type multiplicatif, μ_p est de type multiplicatif mais n'est pas étale. Si $car(K) = 0$, tous les groupes algébriques sont réduits, les groupes algébriques finis sont toujours étales et de type multiplicatif.

Les deux foncteurs précédents sont différents, même s'ils sont bien définis à la fois sur la sous-catégorie de K-groupes algébriques finis en caractéristique 0.

Soit G un K-groupe algébrique fini (donc affine), $G = Spec(A)$ avec A une *algèbre de Hopf* sur K. On définit $A^D = Hom_K(A, K)$, on peut lui donner naturellement une structure d'algèbre de Hopf, et on définit $G^D = Spec(A^D)$ le *dual de Cartier* de G. Supposons G et G^D étales (par exemple, si l'ordre de G est non-divisible par $car(K)$, ou si $car(K) = 0$), on note $M = X^*(G)$ et $M' = X^*(G^D)$, alors $M' = M^D = Hom(M, K^s) = G(K^s)$ et $M = M'^D = Hom(M', K^s) = G^D(K^s)$. Pour plus informations, voir [37, Waterhouse].

Si K est un corps topologique, l'ensemble des points rationnels $G(K)$ est muni d'une topologie naturelle par la topologie de K.

Théorème 1.6.5. *Soit G un K-groupe algébrique* réductif *(connexe), où K est un corps local non-archimédien. Alors, $G(K)$ est un groupe topologique localement compact, Hausdorff, totalement discontinu et compactement engendré.*

Démonstration. cf. [24, AG-NT]. □

Corollaire 1.6.6. *Soit G un K-groupe de type multiplicatif, où K est un corps local non-archimédien. Alors $G(K)$ est un groupe topologique localement compact, Hausdorff, totalement discontinu et compactement engendré.*

Démonstration. On a la suite exacte $0 \to G^0 \to G \to \pi_0(G) \to 0$, alors $0 \to G^0(K) \to G(K) \to \pi_0(G)(K)$. $\pi_0(G)$ est un groupe algébrique fini étale, $\pi_0(G)(K)$ est fini, G^0 est un K-tore, c'est réductif, alors on applique le théorème précédent. □

1.7 Anneaux locaux henséliens

Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k = R/\mathfrak{m}$. Pour tout $f \in R[X]$, on note $\bar{f} \in k[X]$ la réduction modulo $\mathfrak{m}$.

Définition 1.7.1. On dit que R est *hensélien* s'il vérifie le lemme de Hensel, i.e. si f est unitaire tel que $\bar{f} = g_0 h_0$ dans $k[X]$ avec g_0 et h_0 unitaires et co-premiers, alors il existe g et h dans $R[X]$ tels que $f = gh$ et $\bar{g} = g_0$, $\bar{h} = h_0$.

Le lemme de Hensel dit que les anneaux de valuation discrète complets sont toujours henséliens. Mais en général, les anneaux henséliens sont moins grands que leur complété. Le *hensélisation* R^h d'un anneau de valuation discrète R est le plus petit anneau hensélien contenant R. On sait que R et R^h ont même corps résiduel. Par exemple, soit K un corps global, on choisit un prolongement de K^s dans $\widehat{K}_v^s$, où $\widehat{K}_v$ est le complété de K par rapport à la valuation non-archimédienne v, on note $\widehat{\mathcal{O}_v}$ l'anneau des entiers de $\widehat{K}_v$, on a $\mathcal{O}_v^h = K^s \cap \widehat{\mathcal{O}_v}$. Pour plus d'informations, cf. [18, MilneEC I.4].

Soit R un anneau hensélien local du corps des fractions K, avec G_K le groupe de Galois absolu de K. On note $\widehat{R}$ et $\widehat{K}$ les complétés associés.

Théorème 1.7.2 (Greenberg). *Soit X un schéma affine de type fini sur R. Si R est* excellent *(dans notre cas, c'est équivalent à la condition que $\widehat{K}$ soit séparable sur K, cf. [15, Liu] ou [16, Matsumura]), alors $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$ (par rapport à la topologie adique sur $X(\widehat{R})$).*

Démonstration. cf. [7, Greenberg] □

Proposition 1.7.3. *Soit X un schéma de type fini sur R avec R un anneau de valuation discrète excellent, alors $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})$.*

Démonstration. En recouvrant X par des ouverts affines, d'après 1.7.2(Greenberg) $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$. Si X est propre sur R, on a $X(R) = X(K)$ et $X(\widehat{R}) = X(\widehat{K})$ d'après le critère valuatif. Alors $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})$ si X est propre sur R. En général, d'après Nagata on peut plonger X dans un schéma propre, il existe une immersion ouverte sur $j : X \to \bar{X}$ sur R, d'image Zariski dense, telle que $\bar{X}$ soit propre de type fini sur R (cf. [18, MilneEC] ou [20, Nagata]). On obtient que $\bar{X}(K)$ est dense dans $\bar{X}(\widehat{K})$. Restreignant à l'ouvert de Zariski $X(\widehat{K})$ de $\bar{X}(\widehat{K})$, $X(K) = \bar{X}(K) \cap X(\widehat{K})$ est dense dans $X(\widehat{K})$. □

Corollaire 1.7.4. *Soit X un schéma en groupe affine de type fini sur K, alors $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})$.*

Démonstration. Comme X est affine de type fini sur K, il existe un modèle[2] X_0 sur R de X, plus précisément, X_0 est de type fini sur R avec la fibre

[2]Par exemple, X s'écrit comme un sous-schéma fermé d'un espace affine défini par un nombre fini d'équations sur K, on élimine les dénominateurs des coefficients des équations, et on trouve alors un modèle X_0 sur R de X.

générique isomorphe à X sur K, alors $X_0(K) = X(K)$ et $X_0(\widehat{K}) = X(\widehat{K})$. D'après la proposition précédente, $X_0(K)$ est dense dans $X_0(\widehat{K})$. □

Corollaire 1.7.5. *Soit X un schéma en groupe affine de type fini sur K, alors $\widehat{X(K)} \to \widehat{X(\widehat{K})}$ est un isomorphisme ($\widehat{\ }$ en haut est le complété profini par rapport à la topologie adique de $X(K)$ et de $X(\widehat{K})$).*

Démonstration. Si U est un sous-groupe ouvert de $X(\widehat{K})$, alors $X(K)\cap U$ est un sous-groupe ouvert de $X(K)$. $X(K)/X(K)\cap U \simeq X(K)U/U = X(\widehat{K})/U$, car $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})$, alors U est d'indice fini si et seulement si $X(K)\cap U$ est d'indice fini, on conclut. □

Beaucoup de résultats sur un corps local sont encore vrais sur les corps des fractions des anneaux locaux henséliens.

Proposition 1.7.6. *La paire (G_K, K^{s*}) est une formation de classes. En conséquence, on a une application continue $rec_K : K^* \to G_K^{ab}$, qui induit des isomorphismes aux niveaux finis.*

Démonstration. cf.[19, MilneADT I.A] □

Proposition 1.7.7. *Si R est excellent de corps résiduel fini, alors*

(i)toutes les extensions finies séparables de $\widehat{K}$ sont de la forme $\widehat{F}$ avec F une extension finie séparable de K, de plus, on a $[F:K] = [\widehat{F}:\widehat{K}]$;

(ii)K est algébriquement clos dans $\widehat{K}$, on a donc $\widehat{K}$ linéairement disjoint de K^a (la clôture algébrique de K) sur K.

En conséquence, $F \mapsto \widehat{F}$ est une bijection entre les ensemble des extensions finies séparables de F et de $\widehat{F}$. On a donc les groupes de Galois G_K et $G_{\widehat{K}}$ isomorphes, en particulier c'est de dimension cohomologique stricte 2.

Démonstration. On va utiliser un théorème d'approximation de Greenberg [7, Greenberg], cf. [19, MilneADT I.A]. □

Notant que $G_{\widehat{K}}^{ab} = G_K^{ab}$, d'après la théorie du corps de classes local, la seconde ligne du diagramme commutatif suivant est exacte.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^\times \arrow[r] \arrow[d, "i"] & K^* \arrow[r, "ord"] \arrow[d, "rec_K"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{R}^\times \arrow[r] & G_{\widehat{K}}^{ab} \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Alors $0 \to \widehat{R}^\times/R^\times \to coker(rec_K) \to \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \to 0$ est exacte.

Proposition 1.7.8. *Si R est excellent, $coker(rec_K)$ est uniquement divisible par tout premier $l \neq car(K)$.*

Démonstration. On se ramène à montrer que $\widehat{R}^\times/R^\times$ est uniquement divisible par l, car $\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$ l'est. « Uniquement » suit du fait que K est algébriquement clos dans $\widehat{K}$. On considère $f = X^l - a$ avec $a \in \widehat{R}^\times$. Si $|1-a|_{\widehat{K}} < |l|^2_{\widehat{K}}$, le lemme de Hensel implique qu'il existe un élément $x \in \widehat{R}^\times$ tel que x soit une racine de f. On obtient que $U = \{a \in \widehat{R}^\times; |1-a|_{\widehat{K}} < |l|^2_{\widehat{K}}\}$ est un ouvert non-vide de $\widehat{R}^\times$ car $l \neq car(K)$, et $U \subseteq (\widehat{R}^\times)^l$. Appliquant 1.7.2(Greenberg) à $\mathbb{G}_m$, $R^\times$ est dense dans $\widehat{R}^\times$, on a donc pour n'importe quel $b \in \widehat{R}^\times$ il existe $b' \in R^\times$ tel que $a = b/b' \in U$. Alors il existe $x \in \widehat{R}^\times$ tel que $x^l = a = b/b'$, on conclut $\widehat{R}^\times/R^\times$ est divisible par l. □

Remarque 1.7.9. De la même façon, on peut voir que $\widehat{K}^*/K^*$ est uniquement divisible par n lorsque $car(K) \nmid n$. On déduit $K^*/K^{*n} \simeq \widehat{K}^*/\widehat{K}^{*n}$ si $car(K) \nmid n$.

Enfin, grosso modo, « hensélien » signifie « géométriquement simplement connexe », le groupe fondamental a seulement la partie arithmétique, i.e. la partie provenant du corps résiduel.

1.8 Sur les anneaux de Dedekind

Soit D un anneau de Dedekind, on note $K = Frac(D)$, supposons S et S' deux ensembles d'idéaux maximaux de D tels que $Spec(D) = \{0\} \sqcup S \sqcup S'$. Alors $T_S = D \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\notin S}$ est une partie multiplicative, on a $T_S^{-1}D = \{x \in K;\ x = a/b,\ a, b \in D,\ b \in T_S\} = \{x \in K;\ x = a/b,\ v_{\mathfrak{p}}(b) = 0\ \forall \mathfrak{p} \in S'\}$. On note $D_S = \{x \in K;\ v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0,\ \forall \mathfrak{p} \in S'\} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in S'} D_{\mathfrak{p}}$. En général, on a

(1)$T_S^{-1}D \subseteq D_S$,

(2)Tout idéal premier de D dans S' est un idéal premier de $T_S^{-1}D$, i.e. $S' \subseteq Spec(T_S^{-1}D) \setminus \{0\}$.

On définit naturellement $Cl(D) = coker(K^* \overset{\oplus v_{\mathfrak{p}}}{\to} \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq 0} \mathbb{Z})$ le groupe des classes d'idéaux.

Proposition 1.8.1. *Si $Cl(D)$ est de torsion, alors*

(1)$T_S^{-1}D = D_S$,

(2)$S' = Spec(T_S^{-1}D) \setminus \{0\}$.

En conséquence, on a une suite exacte

$$0 \to D^\times \to D_S^\times \to \bigoplus_S \mathbb{Z} \to Cl(D) \to Cl(D_S) \to 0$$

Démonstration. La suite exacte vient du diagramme commutatif suivant avec le lemme du serpent

$$\begin{tikzcd} & K^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & K^* \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_S \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{S\sqcup S'} \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{S'} \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

(1)Pour tout $x = a/b \in D_S \subseteq K$ avec $a, b \in D$, $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ i.e.$v_{\mathfrak{p}}(a) \geqslant v_{\mathfrak{p}}(b)$, $\forall \mathfrak{p} \in S'$, on veut $x \in T_S^{-1}D$. On peut supposer $(b) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s}$ avec $r_i \geqslant 1$ et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l \in S'$, $\mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_s \in S$. Si $l = 0$, on a déjà fini. Sinon, d'après l'hypothèse $Cl(D)$ est de torsion, il existe $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ et $\pi_1, \ldots, \pi_l \in D$ tels que $\mathfrak{p}_i^{n_i} = (\pi_i)$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant l$. Ensuite, on prend $n = n_1 n_2 \cdots n_l$, alors $x = \frac{a}{b} = \frac{c}{b^n}$ avec $c = ab^{n-1}$ et $(b^n) = (\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_l^{\alpha_l})\mathfrak{p}_{l+1}^{nr_{l+1}} \cdots \mathfrak{p}_s^{nr_s}$ où $\alpha_i = \frac{r_i n}{n_i} \in \mathbb{N}$. On peut vérifier $\widetilde{c} = \frac{c}{\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_1^{\alpha_1}} \in D$, $\widetilde{b} = \frac{b^n}{\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_1^{\alpha_1}}$ satisfaisant $v_{\mathfrak{p}}(\widetilde{b}) = 0, \forall \mathfrak{p} \in S'$ et $x = \frac{\widetilde{c}}{\widetilde{b}} \in T_S^{-1}D$.

(2)Si S' est fini, on peut appliquer [2, Atiyah 1.11]. Sinon, on prend $\mathfrak{q} \in Spec(D) \setminus \{0\}$ et $\mathfrak{q} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in S'} \mathfrak{p}$, d'après l'hypothèse $Cl(D)$ est de torsion, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $t \in D$ tels que $(t) = \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in S'} \mathfrak{p}$, alors $t \in \mathfrak{p}$ pour un certain $\mathfrak{p} \in S'$, on a $\mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{q}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ car $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal, on obtient $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \in S'$. □

Remarque 1.8.2. Dans notre cas, si K est un corps de nombres, D est l'anneau d'entiers de K, $Cl(D)$ est un groupe fini ; si K est un corps de fonctions, on pose X la courbe lisse propre associée au K, $U = Spec(D)$ un ouvert affine de X, le groupe $Cl(D) = Pic(U)$ est aussi fini.

1.9 Site étale

Dans cette section et la section suivante, les notions sur la cohomologie étale qui apparaîtront le plus souvent sont introduites, quelques propriétés utiles de la cohomologie étale sont énoncées. Les démonstrations des propositions suivantes peuvent être trouvées dans [18, MilneEC] et [34, Tamme] qui contiennent plus d'informations.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme étale entre deux schémas, c'est une application ouverte (cf. [18, MilneEC I.3.10]). Si f est fini, c'est un morphisme propre, alors fermé, en particulier, c'est surjective si X est connexe.

Proposition 1.9.1. *Soit X un schéma normal connexe, on note $K = K(X)$ le corps de fonctions de X. Soit L une extension finie séparable de K, et* *soit X' la normalisation de X dans L. Si U est un sous-schéma ouvert de X ne rencontre pas à supp$(\Omega^1_{X'/X})$, alors $U \to X$ est étale.*

Réciproquement, soit $Y \to X$ un morphisme étale séparé de type fini, il s'écrit de la forme $Y = \bigsqcup U_i \to X$ où $U_i \to X$ est de la forme ci-dessus.

Démonstration. On peut voir [18, MilneEC I.3.21]. Dans notre cas, X sera une courbe lisse sur un corps fini ou le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, c'est toujours un schéma normal connexe. □

Pour un schéma X, on peut définir le site étale $X_{\text{ét}}$. On note simplement $Fais(X) = \widetilde{X}_{\text{ét}}$ la catégorie de faisceaux de groupes abéliens sur le site $X_{\text{ét}}$.

Proposition 1.9.2. *Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite de faisceaux abéliens sur $X_{\acute{e}t}$. Alors elle exacte si et seulement si $0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}} \to 0$ est exacte pour chaque point géométrique $\bar{x}$ de X.*

Pour la définition de la notion « faisceau » et la démonstration de la proposition cf. [18, MilneEC II].

Exemple 1.9.3. D'après la proposition ci-dessus, on a quelques suites exactes suivantes, qui sont importantes pour les théorèmes de dualité en arithmétique.

(1)Sur le site étale $X_{\text{ét}}$, tout schéma en groupe G se donne un faisceau : $U \mapsto G(U) = Hom(U, G)$ pour chaque objet U de $X_{\text{ét}}$. Par exemple, le groupe additif $\mathbb{G}_a$ se donne le faisceau $\mathcal{O}_X$ et le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ se donne $\mathcal{O}_X^*$. La fibre $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ est la hensélisation stricte de $\mathcal{O}_{X,x}$, i.e. $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ est un anneau hensélien strict et $Spec(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \to Spec(\mathcal{O}_{X,x})$ est étale. (cf. [18, MilneEC II])

Soit p un premier différent de la caractéristique du corps résiduel $k(x)$ pour tout point x de X, alors μ_p est un schéma en groupes étale sur X, et on a une suite exacte $0 \to \mu_p \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \to 0$ de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ qui s'appelle la *suite de Kummer*.

Soit X est un $\mathbb{F}_p$-schéma, alors on a une autre suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a \to 0$ qui s'appelle la *suite d'Artin-Schreier*, où $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est le faisceau constant associé au groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Pour détails on peut voir [18, MilneEC II.2.18].

(2)Soit X un schéma intégral régulier quasi-compact de dimension 1, on pose $g : Spec(K) \to X$ le point générique et $i_x : Spec(k(x)) \to X$ pour chaque point fermé x de X. On a une suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, $0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to g_*\mathbb{G}_{m,K} \to \bigoplus_x i_{x*}\mathbb{Z} \to 0$ (cf. [18, MilneEC II.3.9]).

Soit X un schéma, on peut définir le *groupe fondamental* $\pi_1(X,\bar{x})$ de X associé à un point géométrique $\bar{x}$ de X, c'est un groupe profini. Les groupes $\pi_1(X,\bar{x}_1)$ et $\pi_1(X,\bar{x}_2)$ sont isomorphes (non-canoniquement), on note simplement $\pi_1(X)$ (ce n'est pas un bonne notation, mais quand on la rencontre, on fixe un point géométrique $\bar{x}$ (souvent le point générique) de X et considère $\pi_1(X,\bar{x})$). Par exemple, si $X = Spec(K)$ est un corps, $\pi_1(X) \simeq Gal(K^s/K)$. (cf. [18, MilneEC I.5])

Définition 1.9.4. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F} \in Fais(X)$ est *localement constant* s'il existe un revêtement étale $\{U_i \to X\}$ de X tel que $\mathcal{F}|U_i$ soit constant sur $U_{i\text{ét}}$.

Proposition 1.9.5. *Soit X un schéma connexe, alors $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$ se donne une équivalence de la catégorie de faisceaux localement constants de fibres finies sur $X_{ét}$ vers la catégorie de $\pi_1(X,\bar{x})$-modules discrets finis.*

Démonstration. On peut trouver la démonstration dans [18, MilneEC V.1.2(b) & I.5.3]. □

Remarque 1.9.6. En général, on ne sait pas si l'application $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$ se donne une équivalence de la catégorie de faisceaux localement constant sur $X_{\text{ét}}$ vers la catégorie de $\pi_1(X,\bar{x})$-modules discrets sans l'hypothèse de la finitude[3]. Or si $X = Spec(K) = \{p\}$ est un corps l'application $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{p}}$ se donne une équivalence de la catégorie $Fais(X)$ et la catégorie de $\pi_1(X)$-modules (i.e. $Gal(K^s/K)$-modules) discrets. Dans ce cas $\Gamma(X,\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\pi_1(X)}$. Les faisceaux localement constants sont associés aux modules fixés par un certain sous-groupe ouverte (par exemple lorsque M est de type fini). (cf. [18, MilneEC II.1.9])

Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme entre deux schémas, on peut définir deux foncteurs $\pi^* : Fais(X) \to Fais(Y)$ et $\pi_* : Fais(Y) \to Fais(X)$.

Proposition 1.9.7. *(1)La paire (π^*,π_*) est une paire adjointe.*

(2)On a $(\pi^*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \mathcal{F}_{\pi(\bar{y})}$, alors le foncteur π^* est exact.

(3)Si π est fini, $(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{y\mapsto x} \mathcal{F}_{\bar{y}}^{[k(y):k(x)]_s}$, alors π_* est exact. En particulier, si π est une immersion fermée, alors $(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}}, & x \in \pi(Y) \\ 0, & x \notin \pi(Y) \end{cases}$.

(4)Si π est une immersion ouverte, alors $(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}}, & x \in \pi(Y) \\ ?, & x \notin \pi(Y) \end{cases}$.

[3]Le premier paragraphe de [19, MilneADT II.0 page 142] n'est pas clair. La même problème apparaît en [19, MilneADT II.2 page 170].

Démonstration. cf. [18, MilneEC II.3]. □

On considère un schéma X avec une immersion ouverte $j : U \to X$ et une immersion fermée $i : Z \to X$ telles que $X = U \bigsqcup Z$. On peut définir les foncteurs $j_! : Fais(U) \to Fais(X)$ et $i^! : Fais(X) \to Fais(Z)$.

Proposition 1.9.8. *(1)Les paires (i^*, i_*), $(i_*, i^!)$, $(j_!, j^*)$ et (j^*, j_*) sont adjointes.*

(2)Les foncteurs i_*, i^*, $j_!$, et j^* sont exacts ; les foncteurs i_*, $i^!$, j_* et j^* envoient les faisceaux injectifs aux faisceaux injectifs.

(3)Les foncteurs i_* et j_* sont fidèlement pleins. L'image essentielle est l'ensemble de faisceaux sur $X_{ét}$ ayant support dans Z, alors
$\{\mathcal{F} \in Fais(X); supp(\mathcal{F}) \subseteq Z\} = Fais(Z)$.

(4)Le foncteur $j_!$ peut être encore défini si $U \to X$ est un morphisme étale, on a $(j_!\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}}, & x \in j(U) \\ 0, & x \notin j(U) \end{cases}$.

(5)On a deux suites exactes $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$ et $0 \to i_*i^!\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F}$.

(6)Les triples $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \phi : \mathcal{F}_1 \to i^*j_*\mathcal{F}_2)$ où $\mathcal{F}_1 \in Fais(Z)$, $\mathcal{F}_2 \in Fais(U)$ et ϕ un morphisme entre les faisceaux sur $Z_{ét}$ forment une catégorie. L'application $\mathcal{F} \mapsto (i^*\mathcal{F}, j^*\mathcal{F}, i^*j_*j^*\mathcal{F})$ se donne une équivalence de la catégorie $Fais(X)$ vers la catégorie ci-dessus.

Démonstration. cf. [18, MilneEC II.3] et [34, Tamme II.8.2.1] □

Exemple 1.9.9. (1)Soit $\pi : Y = Spec(K') \to X = Spec(K)$ une extension finie séparable de corps. Soit $\mathcal{F}_M \in Fais(X)$ le faisceau associé à un $Gal(K^s/K)$-module discret M, alors $\pi^*\mathcal{F}_M$ est le faisceau sur $Y_{\text{ét}}$ associé à M vu comme un $Gal(K^s/K')$-module. Soit $\mathcal{G}_N \in Fais(Y)$ le faisceau associé à un $Gal(K^s/K')$-module discret N, alors $\pi_*\mathcal{G}_N$ est le faisceau sur $X_{\text{ét}}$ associé au $Gal(K^s/K)$-module $Ind_{Gal(K^s/K')}^{Gal(K^s/K)}N$.

(2)Soit $X = Spec(A)$ avec A un anneau de valuation discrète, on pose K le corps résiduel du point générique et k le corps résiduel du point fermé, on pose aussi G_K (resp. G_k) le groupe de Galois absolu de K (resp. k) et $I \leqslant G_k$ le groupe d'inertie. D'après les identifications de 1.9.8(6) et 1.9.6, un faisceau $\mathcal{F} \in Fais(X)$ s'écrit (N_1, N_2, ϕ) avec N_1 un G_k-module discret et N_2 un G_K-module discret. Les six foncteurs ci-dessus s'identifient comme suivants $i^*(N_1, N_2, \phi) = N_1$, $i_*(N) = (N, 0, 0)$, $i^!(N_1, N_2, \phi) = ker(\phi)$, $j_!(N) = (0, N, 0)$, $j^*(N_1, N_2, \phi) = N_2$ et $j_*(N) = (N^I, N, 1)$.

Plus généralement, si X est un schéma normal connexe de dimension 1, on a l'identification similaire. On trouva plus d'information dans [18, MilneEC II.3.15 & 3.16].

Pour deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur $X_{\text{ét}}$, on définit $\mathcal{E}xt^r_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto Ext^r_{Fais(U)}(\mathcal{F}_1|U, \mathcal{F}_2|U)$ pour tout $U \to X$ étale. (cf. [18, MilneEC III.1.24])

Proposition 1.9.10. *Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in Fais(X)$. Si $\mathcal{F}_1$ est pseudo-cohérent en point géométrique $\bar{x}$, alors $\mathcal{E}xt^r_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)_{\bar{x}} = Ext^r(\mathcal{F}_{1\bar{x}}, \mathcal{F}_{2\bar{x}})$ pour tout $r \geqslant 0$.*

Démonstration. On remarque que si $\mathcal{F}_1$ est localement constant , alors $\mathcal{F}_1$ est pseudo-cohérent en tout point géométrique, on peut alors calculer les fibres de $\mathcal{E}xt^r_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)_{\bar{x}}$ d'après cette proposition. Pour la démonstration et la définition de « *pseudo-cohérent* », on peut voir [18, MilneEC II.3.20 & III.1.31] prenant $A = \mathbb{Z}$. □

Définition 1.9.11. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $X_{\text{ét}}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *constructible*, si pour chaque sous-schéma fermé irréductible Z de X, il contient un sous-schéma ouvert non-vide U de Z tel que $\mathcal{F}|U$ stoi localement constant de fibres finies.

Proposition 1.9.12. *(1)Soit $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un morphisme entre deux faisceaux constructibles, alors le noyau, le co-noyau et l'image de f sont constructibles.*

(2)Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme entre deux schémas. Alors, $\pi^*\mathcal{F}$ est constructible pour tout $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible. Le faisceaux $\pi_*\mathcal{G}$ est constructible pour tout $\mathcal{G}$ constructible si π est un morphisme fini.

(3)Si X est quasi-compact et quasi-séparé, et si $\mathcal{F} \in Fais(X)$ est de torsion, alors $\mathcal{F}$ est une limite inductive filtrante de faisceaux constructibles sur $X_{\text{ét}}$.

Démonstration. (1)cf. [18, MilneEC V.1.9]. (2)cf. [34, Tamme II.9.3.2] et [10, SGA4 IX.2.14]. (3)cf. [18, MilneEC V.1.10] ou [10, SGA4 IV.2.7.2]. □

Exemple 1.9.13. Pour nous, le cas suivant est le plus important. Soit X un schéma irréductible de dimension 1, si $\mathcal{F} \in Fais(X)$ est constructible, alors $\mathcal{F}$ est de fibre finie en tout point, et il existe un ouvert dense U de X tel que $\mathcal{F}|U$ soit localement constant. Pour un point fermé $i_x : Spec(k(x)) \to X$, $i_x^*\mathcal{F}$ est constructible, alors il est associé à un $Gal(k(x)^s/k(x))$-module discret fini d'après 1.9.6.

1.10 Cohomologie étale

La catégorie $Fais(X)$ a assez d'objets injectifs, alors on peut définir les foncteurs dérivés du foncteur de sections globaux $\Gamma(X, -)$, on les note simplement $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ les groupes de cohomologie étale. On sait que $H^r(X, \mathcal{F}) \simeq Ext^r_X(\mathbb{Z}, \mathcal{F})$.

Les propriétés suivantes sur la cohomologie étale sont utiles pour nous.

Proposition 1.10.1. *Soit $\mathcal{F} \in Fais(X)$ une limite inductive filtrante de faisceaux $\mathcal{F}_i$, si X est un schéma quasi-compact et quasi-séparé alors*

$$H^r(X, F) \simeq \varinjlim H^r(X, \mathcal{F}_i)$$

pour tout r.

Démonstration. cf. [34, Tamme II.1.5.3]On remarque que, dans notre cas, X sera une courbe lisse sur un corps fini ou le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, c'est toujours un schéma quasi-compact et quasi-séparé. □

Proposition 1.10.2. *Soit I une catégorie filtrante et soit $i \mapsto X_i$ un foncteur contre-variant de I vers les X-schémas. Suppose que les X_i sont quasi-compacts et les X-morphisme $X_j \to X_i$ sont affines. Alors $\varprojlim X_i$ existe, et on le note X_∞. On note $F_i = F \times_X X_i$ et $F_\infty = F \times_X X_\infty$ pour F un X-schéma en groupe localement de type fini. Alors*

$$\varinjlim H^r(X_i, F_i) \overset{\simeq}{\to} H^r(X_\infty, F_\infty)$$

est un isomorphisme pour tout r.

Démonstration. cf. [18, MilneEC III.1.16 & 1.17] ou [10, SGA4 VII.5.7]. □

Proposition 1.10.3 (Suite spectrale de Hochschild-Serre). *Soit $\pi : X' \to X$ un revêtement étale (fini) galoisien de groupe de Galois G, alors pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$, $H^s(X', \mathcal{F}|X')$ est un G-module discret et on a une suite spectrale*

$$H^r(G, H^s(X', \mathcal{F}|X')) \Rightarrow H^{r+s}(X'\mathcal{F}).$$

Démonstration. Pour la démonstration cf. [18, MilneEC III.2.20], prenant la limite c'est vrai aussi pour un revêtement étale galoisien infini cf. [18, MilneEC III.2.21], pour la définition du *revêtement galoisien* cf. [18, MilneEC I.5]. □

Proposition 1.10.4 (Suite spectrale locale-globale pour les Exts). *Il existe une suite spectrale pour $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in Fais(X)$,*

$$H^r(X, \mathcal{E}xt^s_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) \Rightarrow Ext^{r+s}_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2).$$

Démonstration. cf. [18, MilneEC III.1.22]. □

Proposition 1.10.5 (Suite spectrale de Leray). *Soit $\pi : X' \to X$ un morphisme entre deux schémas, pour $\mathcal{F} \in Fais(X')$ il existe une suite spectrale*

$$H^r(X, R^s\pi_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{r+s}(X', \mathcal{F}).$$

Démonstration. cf. [18, MilneEC III.1.18]. □

Remarque 1.10.6. On peut comparer les groupes de cohomologie définis sur le site étale et ceux sur le site de Zariski. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules sur X_{Zar}, on l'associe canoniquement un faisceau $a(\mathcal{F})$ sur $X_{\text{ét}}$, et trouve un isomorphisme canonique $H^r(X_{Zar}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^r(X_{\text{ét}}, a(\mathcal{F}))$, en particulier, $H^r(X_{Zar}, \mathcal{O}_X) \simeq H^r(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X)$ (cf. [18, MilneEC III.3.7]).

On considère un schéma $X = U \bigsqcup Z$ avec $j : U \to X$ une immersion ouvert et $i : Z \to X$ une immersion fermée. On a la proposition suivante. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, i_*i^!\mathcal{F}) = \Gamma(Z, i^!\mathcal{F})$ est exact à gauche, dont les foncteurs dérivés notés par $H^r_Z(X, \mathcal{F})$ s'appellent les *groupes de cohomologie à support Z*.

Proposition 1.10.7. *(a)Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ et $\mathcal{F}' \in Fais(X)$ la restriction*

$$Ext^r_X(j_!\mathcal{F}, \mathcal{F}') \to Ext^r_U(\mathcal{F}, j^*\mathcal{F}')$$

est un isomorphisme pour tout $r \geqslant 0$; en particulier

$$Ext^r_X(j_!\mathbb{Z}, \mathcal{F}') \simeq H^r(U, \mathcal{F}'|U)$$

pour $r \geqslant 0$.

(b)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ et $\mathcal{F}' \in Fais(U)$, il existe une suite spectrale

$$Ext^r_X(\mathcal{F}, R^sj_*F') \Rightarrow Ext^{r+s}_U(\mathcal{F}|U, \mathcal{F}').$$

(c)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ et $\mathcal{F}' \in Fais(Z)$, il existe un isomorphisme canonique pour tout $r \geqslant 0$

$$Ext^r_X(\mathcal{F}, i_*\mathcal{F}') \simeq Ext^r_Z(i^*\mathcal{F}, \mathcal{F}').$$

(d)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$, il existe un isomorphisme canonique pour tout $r \geqslant 0$

$$H^r_Z(X, \mathcal{F}) \simeq Ext^r_X(i_*\mathbb{Z}, \mathcal{F});$$

alors pour $\mathcal{F} \in Fais(Z)$ on a un isomorphisme $H^r_Z(X, i_*\mathcal{F}) \simeq H^r(Z, \mathcal{F})$ pour tout $r \geqslant 0$.

(e)Pour $\mathcal{F} \in Fais(Z)$ et $\mathcal{F}' \in Fais(X)$, il existe une suite spectrale

$$Ext^r_Z(\mathcal{F}, R^s i^! \mathcal{F}') \Rightarrow Ext^{r+s}_X(i_* \mathcal{F}, \mathcal{F}').$$

(f)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$, il existe une suite exacte

$$\cdots \to H^r_Z(X, \mathcal{F}) \to H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to H^{r+1}_Z(X, \mathcal{F}) \to \cdots .$$

Démonstration. La preuve est standard utilisant les arguments d'algèbre homologique, cf.[19, MilneADT II.0.1]. $\square$

Enfin, on considère un accouplement de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{P}$, on a alors une application $H^r(X, \mathcal{M}) \to H^r(X, \mathcal{H}om_X(\mathcal{N}, \mathcal{P})) \to Ext^r_X(\mathcal{N}, \mathcal{P})$. Le diagramme suivant est commutatif (cf. [18, MilneEC V.1.20])

$$\begin{array}{ccccc}
H^r(X, \mathcal{M}) & \times & H^s(X, \mathcal{N}) & \xrightarrow{\cup} & H^{r+s}(X, \mathcal{P}) \\
\downarrow & & \| & & \| \\
Ext^r_X(\mathcal{N}, \mathcal{P}) & \times & H^s(X, \mathcal{N}) & \longrightarrow & H^{r+s}(X, \mathcal{P}).
\end{array}$$

Chapitre 2

Cohomologie Galoisienne

Nous discutons les théorèmes de dualité en cohomologie galoisienne.

Premièrement, nous montrons un théorème de dualité (2.1.1) pour une formation de classes, plus généralement, nous obtenons un théorème similaire (2.1.3) pour une P-formation de classes. Nous l'appliquons pour montrer un théorème de dualité (2.2.1) pour les corps locaux; identifiant les H^r et Ext_G^r d'un corps hensélien avec ceux de son complété nous trouvons un théorème similaire (2.2.4). Il y a aussi des résultats pour un corps local archimédien.

Ensuite, nous appliquons le théorème de dualité locale afin d'obtenir un théorème de Tate (2.3.5) sur les variétés abéliennes.

Enfin, nous commençons à discuter en détails les théorèmes de dualité liés à un corps global : le théorème sur la suite de Poitou-Tate (2.4.8) est montré complètement; la finitude de $\text{Ш}^1_S(K, M)$ (Proposition 2.4.9) est aussi montrée. Afin d'obtenir la suite de Poitou-Tate, nous étudions la théorie du corps de classes global par rapport à l'extension K_S/K; appliquant le théorème de dualité pour une P-formation de classes, nous identifions alors les groupes dans la suite longue des Ext associée à la suite exacte $0 \to E_S \to J_S \to C_S \to 0$ avec les groupes apparaissant dans la suite de Poitou-Tate.

Les formules des caractéristiques d'Euler-Poincaré locale (2.2.6) et globale (2.4.20) sont discutées en détails.

Les huit premières sections du chapitre 1 sont des préliminaires, qui contiennent la théorie de la cohomologie des groupes, la théorie du corps de classes, quelques propositions d'algèbre homologique, etc..

2.1 Dualité relative à une formation de classes

Soient (G, C) une formation de classes et M un G-module discret, on a un accouplement naturel (l'accouplement de Yoneda cf.1.2)

$$Ext^r_G(M, C) \times H^{2-r}(G, M) \to H^2(G, C) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Il induit les applications

$$\alpha^r(G, M) : Ext^r_G(M, C) \to H^{2-r}(G, M)^*.$$

En particulier, si l'on prend $M = \mathbb{Z}$, la remarque 1.3.4 dit que rec_G est induit par le cup-produit entre $H^0(G, C)$ et $H^2(G, \mathbb{Z})$ qui commute avec l'accouplement de Yoneda, c'est-à-dire que

$\alpha^0(G, \mathbb{Z}) : Ext^0_G(\mathbb{Z}, C) = H^0(G, C) = C^G \to H^2(G, \mathbb{Z}) = G^{ab}$ égale à rec_G;

$\alpha^1(G, \mathbb{Z}) : Ext^1_G(\mathbb{Z}, C) = H^1(G, C) = 0 \to H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$;

$\alpha^2(G, \mathbb{Z}) : Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) = H^2(G, C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ égale à inv_G.

On prend $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, d'après la diagramme suivant avec les lignes exacte(cf.1.1.6) qui vient de l'application des foncteur $H^*(G, -)^*$ et $Ext^*_G(-, C)$ sur la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0\ ,$$

$$\begin{tikzcd}
 & (C^G)_m \arrow[d, equal] & C^G \arrow[d, equal, "H^0(G,C)" description] & C^G \arrow[d, equal] & (C^G)^{(m)} \arrow[d, equal] & 0 = H^1(G,C) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & Ext^0_G(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"'] & Ext^0_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "rec_G=\alpha^0(G,\mathbb{Z})" description] & Ext^0_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[r] \arrow[d, "rec_G=\alpha^0(G,\mathbb{Z})" description] & Ext^1_G(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"] & Ext^1_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[d, "\alpha^1(G,\mathbb{Z})"] \\
\cdots \arrow[r] & H^2(G, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^* \arrow[r] \arrow[d, dotted, two heads] & H^2(G, \mathbb{Z})^* \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal, "H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^*" description] & H^2(G, \mathbb{Z})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(G, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(G, \mathbb{Z})^* \arrow[d, equal] \\
 & (G^{ab})_m \arrow[r, hook] & G^{ab} & G^{ab} & (G^{ab})^{(m)} & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, equal] & H^2(G,C)_m \arrow[d, equal] & H^2(G,C) \arrow[d, equal] & H^2(G,C) \arrow[d, equal] & \\
\cdots \arrow[r, "m"] & Ext^1_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1(G,\mathbb{Z})"] & Ext^2_G(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"] & Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\alpha^2(G,\mathbb{Z})"] & Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^2(G,\mathbb{Z})"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "m"] & H^1(G, \mathbb{Z})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*" description] & H^0(G, \mathbb{Z})^* \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal, "\mathbb{Z}^*" description] & H^0(G, \mathbb{Z})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 & \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

On obtient que $\alpha^0(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)_m \to H^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ composant avec $H^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \twoheadrightarrow (G^{ab})_m$ est induit par rec_G;

$\alpha^1(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)^{(m)} \to (G^{ab})^{(m)}$ est induit par rec_G;

$\alpha^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : H^2(G,C)_m \to \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est l'isomorphisme induit par inv_G.

On note que d'après

$$\cdots \to H^2(G,\mathbb{Z}) = G^{ab} \xrightarrow{m} H^2(G,\mathbb{Z}) = G^{ab} \to H^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

la surjection $H^2(G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \twoheadrightarrow (G^{ab})_m$ n'est pas un isomorphisme en général. Mais si $H^3(G,\mathbb{Z}) = 0$, c'est un isomorphisme ; ainsi la condition $scd_p(G) = 2$ pour tout $p \mid m$ est très importante pour les théorèmes de dualité en arithmétique.

Théorème 2.1.1. *Soient (G,C) une formation de classes et M un G-module discret de type fini.*

(a)L'application $\alpha^r(G,M) : Ext^r_G(M,C) \to H^{2-r}(G,M)^*$ est bijective pour tout $r \geqslant 2$, $\alpha^1(G,M)$ est bijective si M est sans torsion. En particulier, $Ext^r_G(M,C) = 0$ pour $r \geqslant 3$.

(b)L'application $\alpha^1(G,M) : Ext^1_G(M,C) \to H^1(G,M)^*$ est bijective si $\alpha^1(U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est bijective pour tout entier m et tout sous-groupe ouvert U de G.

(c)L'application $\alpha^0(G,M) : Ext^0_G(M,C) \to H^2(G,M)^*$ est surjective (resp. bijective) pour tout M fini si $\alpha^0(U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjective (resp. bijective) pour tout entier m et tout sous-groupe ouvert U de G.

Lemme 2.1.2. *On a $Ext^r_G(M,C) = 0$ pour $r \geqslant 4$; de plus si M est sans torsion, $Ext^3_G(M,C) = 0$.*

Démonstration. Il y a une résolution de M par des G-modules discrets

$$0 \to M_1 \to M_0 \to M \to 0$$

avec M_i sans torsion et de type fini, car M est un G-module discret de type fini. Alors il suffit de montrer $Ext^r_G(M,C) = 0$ pour $r \geqslant 3$ et M sans torsion. En ce cas $Ext^r(M,\mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 1$. On note $N = Hom(M,\mathbb{Z})$, c'est sans torsion, alors $N \otimes_{\mathbb{Z}} C$ et $Hom(M,C)$ sont deux G-modules discrets isomorphes. La suite spectrale 1.2.6 implique $Ext^r_G(M,C) \simeq H^r(G, N \otimes_{\mathbb{Z}} C) = \varinjlim_{U \lhd G, N^U = N} H^r(G/U, N \otimes_{\mathbb{Z}} C^U)$. Parce que N est sans torsion 1.3.2(Tate-Nakayama) implique que $H^{r-2}(G/U,N) \xrightarrow{\simeq} H^r(G/U, N \otimes_{\mathbb{Z}} C^U); a \mapsto a \cup u_{G/U}$ pour $r \geqslant 3$. On va montrer que la limite inductive de $H^{r-2}(G/U,N)$ est

0. En effet, notant $Inf(u_{G/U}) = [U:V]u_{G/V}$ et $Inf(x \cup y) = Inf(x) \cup Inf(y)$ on peut vérifier que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H^{r-2}(G/U, N) & \xrightarrow[-\cup u_{G/U}]{\simeq} & H^r(G/U, N \otimes_{\mathbb{Z}} C^U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle [U:V]Inf} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Inf} \\ H^{r-2}(G/V, N) & \xrightarrow[-\cup u_{G/V}]{\simeq} & H^r(G/V, N \otimes_{\mathbb{Z}} C^V) \end{array}$$

Par définitions d'ordre et d'indice pour les groupes profinis (cf. [32, Shatz]), on déduit d'après 1.3.5, que pour tout U il existe un sous-groupe distingué ouvert V de U tel que $n \mid [U:V]$ pour n arbitraire. Si $r \geqslant 3$, les H^{r-2} sont de torsion, alors la limite inductive est 0. $\square$

Démonstration (du théorème). Les cas $M = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ impliquent que les assertions sont vraies si $r \leqslant 2$ et G agit trivialement sur M. Le lemme précédant dit que c'est toujours vrai si $r \geqslant 4$, et $Ext^3_G(\mathbb{Z}, C) = 0$. D'après la suite exacte

$$Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) \xrightarrow{m} Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) \to Ext^3_G(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, C) \to Ext^3_G(\mathbb{Z}, C) = 0,$$

on sait que $Ext^3_G(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, C) = 0$ car $Ext^2_G(\mathbb{Z}, C) \simeq H^2(G, C) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible. Alors, les assertions sont vraies si $r = 3$ et G agit trivialement sur M. Donc si G agit trivialement sur M les assertions sont vraies. En général, M est un G-module discret de type fini, on prend un sous-groupe distingué ouvert U de G tel que $M^U = M$. On note $M_* = Hom(\mathbb{Z}[G/U], M) \simeq \mathbb{Z}[G/U] \otimes_{\mathbb{Z}} M$ car G/U est fini, d'après 1.2.3 on a $H^r(G, M_*) = H^r(U, M)$ et $Ext^r_G(M_*, C) = Ext^r_U(M, C)$. On a une suite exacte de G-modules discrets $0 \to M \to M_* \to M_1 \to 0$(on note que si M est sans torsion, M_* et M_1 le sont par construction), qui induit le diagramme commutatif suivant avec les lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & Ext^r_U(M, C) & & & & & & \\ & & \Vert & & & & & & \\ Ext^r_G(M_1, C) & \longrightarrow & Ext^r_G(M_*, C) & \longrightarrow & Ext^r_G(M, C) & \longrightarrow & Ext^{r+1}_G(M_1, C) & \to & \cdot \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^r(G, M_1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^r(G, M_*) = \alpha^r(U, M)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^r(G, M)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{r+1}(G, M_1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{r+1}(U, M)} \\ Hom^{2-r}(G, M_1)^* & \to & Hom^{2-r}(G, M_*)^* & \to & Hom^{2-r}(G, M)^* & \to & Hom^{1-r}(G, M_1)^* & \to & \cdot \\ & & \Vert & & & & & & \\ & & H^{2-r}(U, M)^* & & & & & & \end{array}$$

Maintenant, U agit trivialement sur M, alors $\alpha^3(U, M)$ est un isomorphisme. On sait que $\alpha^4(G, M_1)$ et $\alpha^4(U, M)$ sont isomorphes. Donc $\alpha^3(G, M)$

est surjective pour tout M. $\alpha^3(G, M_1)$ est donc surjective. Les surjectivités de ces deux applications impliquent le injectivité de $\alpha^3(G, M)$. On obtient que $\alpha^3(G, M)$ est un isomorphisme. La même preuve montre que $\alpha^2(G, M)$ est aussi un isomorphisme. Toutes les assertions restantes peuvent être montrées par la même façon. □

De la même façon, on peut montrer le théorème suivant qui est un peu plus général.

Théorème 2.1.3. *Soient (G, C) une P-formation de classes, et l un premier dans P, si M est un G-module discret de type fini.*

(a)L'application $\alpha^r(G, M)(l) : Ext^r_G(M, C)(l) \to H^{2-r}(G, M)^*(l)$ est bijective pour tout $r \geqslant 2$, $\alpha^1(G, M)(l)$ est bijective si M est sans torsion. En particulier, $Ext^r_G(M, C)(l) = 0$ pour $r \geqslant 3$.

(b)L'application $\alpha^1(G, M) : Ext^1_G(M, C)(l) \to H^1(G, M)^*(l)$ est bijective si $\alpha^1(U, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$ est bijective pour tout m et tout sous-groupe ouvert U de G.

(c)L'application $\alpha^0(G, M)(l) : Ext^0_G(M, C)(l) \to H^2(G, M)^*(l)$ est surjective (resp. bijective) pour tout M fini si $\alpha^0(U, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$ est surjective (resp. bijective) pour tout m et tout sous-groupe ouvert U de G.

Démonstration. Pour $l \in P$, la démonstration précédente marche bien pour la partie l-primaire parce que l'on a $l^\infty \mid [G]$ d'après 1.3.7. □

Exemple 2.1.4. D'après 1.3.8 (a), $(G, C) = (\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ est une formation de classes. On sait que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est de dimension cohomologique stricte 2 (cf. 1.5.4(i)), on a alors $\alpha^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)_m = 0 \to (G^{ab})_m = 0$ et $\alpha^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)^{(m)} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to (G^{ab})^{(m)} = \widehat{\mathbb{Z}}/m\widehat{\mathbb{Z}}$ sont des isomorphismes (cf. la discussion avant Théorème 2.1.1). C'est le cas si l'on remplace G par n'importe quel sous-groupe ouvert U (qui est aussi isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$). Le théorème 2.1.1 implique que $\alpha^r(G, M)$ est un isomorphisme pour $r \geqslant 1$ si M est de type fini, et que $\alpha^0(G, M)$ est un isomorphisme si M est fini.

Si M est de type fini, on a $H^1(G, M)$ fini. En effet, on peut prendre un sous-groupe ouvert U de G qui agit trivialement sur M, on obtient alors une suite exacte (cf. 1.2.4 ou [28, SerreCorpsLoc VII.6])

$$0 \to H^1(G/U, M) \to H^1(G, M) \to H^1(U, M).$$

$H^1(G/U, M)$ est fini car G/U est fini et M est de type fini (cf.1.2.2), $H^1(U, M)$ est aussi fini car U agit trivialement sur M est $H^1(U, \mathbb{Z}) = Hom_{cts}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0$, $H^1(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = Hom_{cts}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Donc $H^1(G, M)$ est fini, et $Ext^1_G(M, \mathbb{Z})$ l'est car ils sont duaux.

Maintenant, $\alpha^0(U,\mathbb{Z}) : \mathbb{Z} \to H^2(U,\mathbb{Z})^* = U^{ab} = \widehat{\mathbb{Z}}$ induit un isomorphisme $\widehat{\alpha}^0(U,\mathbb{Z}) : \widehat{\mathbb{Z}} \to \widehat{\mathbb{Z}}$. Alors $\widehat{\alpha}^0(U,M)$ est un isomorphisme, car U agit trivialement sur M.

De la même méthode que la démonstration de Théorème 2.1.1, on obtient un diagramme de deux suites exactes longues, on le complète et trouve le diagramme suivant[1] (notant le fait que le premier terme de la deuxième ligne est 0 vient de $scd(G) = 2$, mais ce n'est pas important pour les arguments ici)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \widehat{Hom_G}(M_1,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \widehat{Hom_U}(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \widehat{Hom_G}(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow \\
& \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(G,M_1)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(U,M)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\alpha}^0(G,M)} & \\
0 \longrightarrow & H^2(G,M_1)^* & \longrightarrow & H^2(U,M)^* & \longrightarrow & H^2(G,M)^* & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & Ext^1_G(M_1,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & Ext^1_U(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow \cdots \\
& \big\downarrow{\scriptstyle \alpha^1(G,M_1)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha^1(U,M)} & \\
\longrightarrow & H^1(G,M_1)^* & \longrightarrow & H^1(U,M)^* & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

La deuxième ligne ne changent pas car les H^2 et H^1 sont de torsion, leurs duaux sont déjà profinis (cf. section 1.1), les Ext^1 ne changent pas car ils sont fini. D'après corollaire 1.1.4, le première ligne reste exacte après complété, parce que tous les $H^0 = Hom$ sont de type fini discrets. De la même méthod que la démonstration de Théorème 2.1.1, on obtient que $\widehat{\alpha}^0(G,M)$ est un isomorphisme pour tout M de type fini.

(i)Si M est fini, on peut déduire $Ext^r(M,\mathbb{Z}) = 0,\ \forall r \neq 1$ de la suite de cohomologie de $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ et le fait que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif. On obtient $Ext^{r+1}_G(M,\mathbb{Z}) = H^r(G,M^\vee)$ de la suite spectrale 1.2.6, où $M^\vee = Hom(M,\mathbb{Z})$. On a donc l'accouplement parfait

$$H^r(G,M^\vee) \times H^{1-r}(G,M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii)Si M est sans torsion, $Ext^r(M,\mathbb{Z}) = 0,\ \forall r > 0$, on déduit

$Ext^r_G(M,\mathbb{Z}) = H^r(G,M^\vee)$ de la suite spectrale 1.2.6.

On a donc les isomorphismes[2]

$H^r(G,M^\vee) \simeq H^{2-r}(G,M)^*,\ \forall r \geqslant 1$, et $\widehat{H}^0(G,M^\vee) \simeq H^2(G,M)^*$.

Remarque 2.1.5. La discussion ci-dessus est générale, beaucoup de résultats sont montrés de façon similaire.

[1]Ici on note $\widehat{Hom_G}(M,\mathbb{Z})$ le complété profini de $Hom_G(M,\mathbb{Z})$.

[2]La notation $\widehat{H}^0$ n'est pas la cohomologie de Tate, qui est notée par H^0_T, $\widehat{H}^0$ est le complété profini de H^0.

2.2 Dualité locale

2.2.1 Dualité locale

Corps locaux non-archimédiens

Soit K un corps local non-archimédien (de caractéristique 0 ou p) avec corps résiduel k (fini de caractéristique p.) On note $ord : K^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ la valuation associée. On note le groupe de Galois absolu par $G = G_K = Gal(K^s/K)$ et le sous-groupe d'inertie $I = Gal(K^s/K^{nr})$ où K^{nr} est le extension non-ramifiée maximale de K dans K^s. On sait que $scd(G) = 2$ (cf.1.5.4). On sait que (G, K^{s*}) est une formation de classes (cf.1.3.8), l'application d'Artin $rec_K : K^* \to G^{ab}$ est injective avec l'image dense, dont le co-noyau uniquement divisible, et elle induit un isomorphisme des groupes topologiques $\widehat{K}^* \xrightarrow{\simeq} G^{ab}$ cf.1.4.1.

D'près la discussion avant le théorème 2.1.1, on a

$$\alpha^0(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)_m = \mu_m(K) \xrightarrow{\simeq} H^2(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = (G^{ab})_m,$$

$$\alpha^1(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : (C^G)^{(m)} = K^*/K^{*m} \xrightarrow{\simeq} (G^{ab})^{(m)}$$

sont des isomorphismes.

Les assertions ci-dessus restent vraies si l'on remplace G par un sous-groupe ouvert U quelconque.

Théorème 2.2.1. *Soit M un G-module discret de type fini. Alors,*

$$\alpha^r(G, M) : Ext^r_G(M, K^{s*}) \to H^{2-r}(G, M)^*$$

est un isomorphisme pour tout $r \geqslant 1$.

L'application $\alpha^0(G, M)$ induit un isomorphisme topologique $\widehat{\alpha}^0(G, M)$: $\widehat{Hom}_G(M, K^{s*}) \to H^2(G, M)^*$, le $\widehat{\ }$ peut être omis si M est fini.

Les groupes $Ext^r_G(M, K^{s*})$ et $H^r(G, M)$ sont finis pour tout entiers r, si M est fini d'ordre non-divisible par $car(K)$.

$Ext^1_G(M, K^{s*})$ et $H^1(G, M)$ sont finis pour M de type fini sans $car(K)$-torsion.

Démonstration. La première assertion se déduit du théorème 2.1.1. On commence par la démonstration de la finitude. On a $0 \to \mu_n(K^s) \to K^{s*} \xrightarrow{n} K^{s*} \to 0$ pour $p \nmid n$, on obtient donc la suite de cohomologie (avec le théorème de Hilbert 90) $0 \to \mu_n(K) \to K^* \to K^* \to H^1(G, \mu_n(K^s)) \to$

$H^1(G, K^{s*}) = 0 \xrightarrow{n} H^1(G, K^{s*}) = 0 \to H^2(G, \mu_n(K^s)) \to H^2(G, K^{s*}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{n} H^2(G, K^{*s}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \cdots$. Alors, (notant que $scd(G) = 2$)

$$\begin{array}{ccccc} H^r(G, \mu_n(K^s)) & = & K^*/K^{*n} & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & 0 \\ r & = & 1 & 2 & \geqslant 3 \end{array}.$$

En particulier, ils sont finis, parce que par le même truc de la démonstration que la proposition 1.7.8 on voit la finitude de K^*/K^{*n} lorsque $car(K) \nmid n$.

Suppose que M est fini d'ordre m non-divisible par $car(K)$. On choisit L une extension finie de K qui contient toutes les m^{ime} racines de l'unité telle que $Gal(K^s/L)$ opère trivialement sur M. Alors, $M \simeq \bigoplus_{m_i} \mu_{m_i}$ comme $Gal(K^s/L)$-module, les $H^s(Gal(K^s/L), M)$ sont finis pour tout s et sont 0 pour $s \geqslant 3$. La suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. 1.2.5) dit que $H^r(Gal(L/K), H^s(Gal(K^s/L), M)) \Rightarrow H^{r+s}(G, M)$, on obtient donc la finitude de $H^r(G, M)$. Les $Ext^r_G(M, K^{s*})$ sont aussi finis, car ils sont duaux des H^{2-r} d'après le théorème 2.1.1.

Si M est de type fini sans $car(K)$-torsion, on veut voir la finitude de $H^1(G, M)$ et $Ext^1_G(M, K^{s*})$ (qui sont duaux entre les deux (cf. 2.1.1)). D'après le paragraphe précédent, on se ramène au cas où M est sans torsion. On choisit L une extension finie de K telle que $Gal(K^s/L)$ opère trivialement sur M, on a la suite exacte (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6]) $0 \to H^1(Gal(L/K), M) \to H^1(Gal(K^s/K), M) \to H^1(Gal(K^s/L), M) \to \cdots$. On note que $H^1(Gal(L/K), M)$ est fini (cf. 1.2.2) et $H^1(Gal(K^s/L), M) \simeq \bigoplus H^1(Gal(K^s/L), \mathbb{Z}) = \bigoplus Hom_{cts}(Gal(K^s/L), \mathbb{Z}) = 0$, la finitude du groupe $H^1(Gal(K^s/K), M)$ est claire.

Il reste à voir l'assertion de $\widehat{\alpha}^0$ pour M de type fini. La théorie du corps de classes local dit que $\widehat{K^*} \xrightarrow{\simeq} G^{ab}$ est un isomorphisme, i.e. $\widehat{\alpha}^0(G, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme, alors $\widehat{\alpha}^0(G, M)$ est un isomorphisme si G agit trivialement sur M. Ensuite, on fait le même dévissage que celui dans la démonstration de l'exemple 2.1.4 et complète le diagramme, on obtient

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{Hom_G}(M_1, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\alpha}^0(G,M_1)"] & \widehat{Hom_U}(M, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\alpha}^0(U,M)"] & \widehat{Hom_G}(M, K^{s*}) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\alpha}^0(G,M)"] & Ext^1_G(M_1, K^{s*}) \arrow[d, "\alpha^1(G,M_1)"] \\
0 \arrow[r] & H^2(G, M_1)^* \arrow[r] & H^2(U, M)^* \arrow[r] & H^2(G, M)^* \arrow[r] & H^1(G, M_1)^*.
\end{tikzcd}$$

La deuxième ligne ne change pas car leur termes sont duaux de groupes de torsion qui sont alors profinis. Les Ext^1_G ne change pas car ils sont isomorphes avec H^{1*}. La première ligne reste exacte après le complété (cf.1.1.4), parce que les premiers trois termes sont des ensembles de K-points rationnels sur des groupes de type multiplicatif (cf.1.6.2), qui sont localement compacts, Hausdorff, totalement discontinus et engendrés compactement (cf. 1.6.6), et les termes suivants sont profinis. Alors l'argument de dévissage marche bien, la démonstration est complète. □

Corollaire 2.2.2. *Soit M un G-module discret de type fini sans $car(K)$-torsion, alors le cup-produit définit les isomorphismes*

$$H^r(G, M^D) \to H^{2-r}(G, M)^*, \ \forall r \geqslant 1$$

et
$$\widehat{H}^0(G, M^D) \to H^2(G, M)^*,$$

où $M^D = Hom(M, K^{s*})$. $H^1(G, M^D)$ et $H^1(G, M)$ sont finis. Si M est fini, $\widehat{H}^0(G, M^D) = H^0(G, M^D)$ est aussi fini.

Démonstration. On remarque que M^D est un G-module discret car M est de type fini. D'après le théorème 2.2.1, il suffit de montrer $Ext^r_G(M, K^{s*}) \simeq H^r(G, M^D)$. On sait que K^{s*} est divisible par tout nombre premier $l \neq car(K)$, alors il est divisible par tout entier $n \mid [M_t]$, la suite spectrale induit que $H^r(G, Hom(M, K^{s*})) = Ext^r_G(M, K^{s*})$ (cf.1.2.6). □

Cohomologie non-ramifiée

Soit K un corps local non-archimédien de groupe de Galois G et sous-groupe d'inertie I, on note k le corps résiduel de K, $car(k) = p$.

Si I agit trivialement sur M, on dit que M est *non-ramifié.*

Dans ce cas, on note $M^d = Hom(M, \mathcal{O}_K^{nr\times}) \subseteq Hom(M, K^{s*}) = M^D$. On a la suite exacte (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6])

$$0 \to H^1(G/I, M) \to H^1(G, M) \to H^1(I, M),$$

$H^1(G/I, M)$ est un sous-groupe de $H^1(G, M)$. On sait que $(G/I \simeq \widehat{\mathbb{Z}}, M)$ est une formation de classes et

$$\alpha^r(G/I, M) : Ext^r_{G/I}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^{2-r}(G/I, M)^*$$

est un isomorphisme pour $r \geqslant 1$ et tout M de type fini (cf. 2.1.4.)

Théorème 2.2.3. *Soit M un G-module discret de type fini non-ramifié satisfaisant $p \nmid [M_t]$, alors $H^1(G/I, M)$ et $H^1(G/I, M^d)$ sont exactement annihilateurs l'un de l'autre sous l'accouplement parfait*

$$H^1(G, M) \times H^1(G, M^D) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^{s*}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Démonstration. Par définition, $Ext^1_I(\mathbb{Z}, K^{s*}) = H^1(I, K^{s*}) = 0$ d'après théorème de Hilbert 90. D'après la proposition 1.2.4, la suite spectrale $Ext^r_{G/I}(M, Ext^s_I(\mathbb{Z}, K^{s*})) \Rightarrow Ext^{r+s}_G(M, K^{s*})$ implique que $H^1(G, M^D) \simeq Ext^1_G(M, K^{s*}) \simeq Ext^1_{G/I}(M, Ext^0_I(\mathbb{Z}, K^{s*})) = Ext^1_{G/I}(M, K^{nr*})$.

Notant que K^{nr} est non-ramifiée sur K, lorsque l'on choisit une uniformisant, on déduit que la suite exacte de G/I-modules

$$0 \to \mathcal{O}_K^{nr\times} \to K^{nr*} \stackrel{ord}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

est scindée. On obtient donc la suite exacte

$$0 \to Ext^1_{G/I}(M, \mathcal{O}_K^{nr\times}) \to Ext^1_{G/I}(M, K^{nr*}) \to Ext^1_{G/I}(M, \mathbb{Z}) \to 0,$$

i.e.

$$\begin{aligned} Ext^1_{G/I}(M, \mathcal{O}_K^{nr\times}) &= ker(Ext^1_{G/I}(M, K^{nr*}) \to Ext^1_{G/I}(M, \mathbb{Z})) \\ &= ker(Ext^1_G(M, K^{s*}) \to Ext^1_{G/I}(M, \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

D'après la construction des formations de classes (G, K^{s*}) et $(G/I, \mathbb{Z})$ (elles sont liées par l'application ord, cf. 1.3.8), on sait que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} Ext^1_G(M, K^{s*}) \arrow[r, "\alpha^1(G/I,M)", "\simeq"'] \arrow[d] & H^1(G, M)^* \arrow[dd, "Inf^*"] \\ Ext^1_{G/I}(M, K^{un*}) \arrow[d, "ord"] & \\ Ext^1_{G/I}(M, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\alpha^1(G/I,M)", "\simeq"'] & H^1(G/I, M)^* \end{tikzcd} ,$$

dont les lignes sont isomorphes d'après le théorème 2.2.1 et 2.1.4.

On obtient $Ext^1_{G/I}(M, \mathcal{O}_K^{nr\times}) = ker(Ext^1_G(M, K^{s*}) \to H^1(G/I, M)^*)$.

On sait aussi $Ext^1_G(M, K^{s*}) \simeq H^1(G, M^D)$ (cf. 2.2.2), de la même façon on voit que $Ext^1_{G/I}(M, \mathcal{O}_K^{nr*}) \simeq H^1(G/I, M^d)$ car $\mathcal{O}_K^{nr\times}$ est divisible par tout premier $l \mid [M_t]$ d'après le lemme de Hensel.

On obtient $H^1(G/I, M^d) = ker(H^1(G, M^D) \to H^1(G/I, M)^*)$ est un sous-groupe de $H^1(G, M^D)$, et l'assertion que $H^1(G/I, M)$ et $H^1(G/I, M^d)$ sont exactement annihilateurs l'un de l'autre sous l'accouplement $H^1(G, M) \times H^1(G, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Résultats pour les corps henséliens

Le théorème suivant est un peu plus général.

Théorème 2.2.4. *Soit R un anneau excellent hensélien de corps des fractions K, on note $G = Gal(K^s/K)$. Soit M un G-module discret de type fini sans $car(K)$-torsion, alors*

(a)L'application

$$\alpha^r(G,M) : Ext^r_G(M, K^{s*}) \to H^{2-r}(G,M)^*$$

est un isomorphisme pour tout $r \geqslant 1$, L'application $\alpha^0(G,M)$ induit un isomorphisme topologique $\widehat{\alpha}^0(G,M) : \widehat{Hom_G}(M, K^{s*}) \to H^2(G,M)^*$. Le $\widehat{\ }$ peut être omis si M est fini. Les groupes $Ext^r_G(M, K^{s*})$ et $H^r(G,M)$ sont finis pour $r = 1$, ils le sont pour tout r si M est fini.

(b)Le cup-produit définit des isomorphismes $H^r(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^{2-r}(G,M)^*$, $\forall r \geqslant 1$ et $\widehat{H}^0(G, M^D) \xrightarrow{\simeq} H^2(G,M)^*$, les groupes $H^1(G,M)$ et $H^1(G, M^D)$ sont finis.

Démonstration. L'assertion (b) peut être déduite directement de (a).

On sait que $G_K \simeq G_{\widehat{K}}$ et $scd(G_K) = 2$, et que l'application rec_K est injective avec le co-noyau uniquement divisible par tout premier $l \neq car(K)$ (cf. section 1.7).

On remarque que l'on ne peut pas appliquer directement le théorème 2.1.1(b,c) car l'hypothèse n'est pas satisfaite dans le cas $car(K) = p \neq 0$; et que l'on ne peut pas appliquer directement la démonstration du théorème 2.2.1, parce que quand on veut faire le dévissage, M_1 peut avoir de la p-torsion même si M n'a pas p-torsion. Mais lorsque $car(K) = p \nmid M_t$, on va identifier $Ext^r_G(M, K^{s*})$ avec $Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*})$ pour $r \geqslant 1$ et $\widehat{Hom_G}(M, K^{s*})$ avec $\widehat{Hom_G}(M, \widehat{K}^{s*})$, alors l'assertion en suit.

D'après la remarque 1.7.9, $\widehat{L}^*/L^*$ est uniquement divisible par tout premier $l \neq car(K)$ pour tout L extension finie de K, on prend la limite et obtient $\widehat{K}^{s*}/K^{s*}$ est uniquement divisible par tout premier $l \neq car(K)$ (cf.1.7.7), d'où $H^r(G, Hom(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*})) = Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*})$ pour tout r (cf. 1.2.6). Si M est fini, la divisibilité implique que $Hom(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}) = 0$, alors $Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*}/K^{s*}) = 0$. On obtient de la suite de cohomologie de $1 \to K^{s*} \to \widehat{K}^{s*} \to \widehat{K}^{s*}/K^{s*} \to 1$ le fait que $Ext^r_G(M, K^{s*}) \simeq Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*})$ pour tout r si M est fini.

Si M est sans torsion, on a pour $r \geqslant 1$, $Ext^r_G(M, K^{s*}) \simeq H^{2-r}(H,M)^* \simeq Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*})$ d'après 2.1.1(a) et le théorème 2.2.1.

En général, la suite de cohomologie de la suite exacte courte $0 \to M_t \to M \to M/M_t \to 0$ et la discussion ci-dessus se donnent $Ext^r_G(M, K^{s*}) \simeq Ext^r_G(M, \widehat{K}^{s*})$ pour tout $r \geqslant 1$. Le fait que $\widehat{Hom_G}(M, K^{s*}) \simeq \widehat{Hom_G}(M, \widehat{K}^{s*})$ vient de 1.7.5 et 1.6.2. □

Corps locaux archimédiens

Pour les corps locaux $K = \mathbb{C}$ les H_T^r sont triviaux, pour $K = \mathbb{R}$ on a

Théorème 2.2.5. *Soit $G = G_{\mathbb{R}}$. Pour tout G-module discret de type fini M, on note $M^D = Hom(M, \mathbb{C}^*)$, le cup-produit définit un accouplement parfait des groupes finis pour tout r*

$$H_T^r(G, M^D) \times H_T^{2-r}(G, M) \to H^2(G, \mathbb{C}^*) \overset{\simeq}{\to} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. On sait que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si M est fini, $M = \bigoplus_l M(l)$, alors pour $r \geqslant 1$ on a $H^r(G, M) = \bigoplus_l H^r(G, M(l)) = H^r(G, M(2))$. Les H_T^r sont de période 2 (cf. section 1.2), d'où $H_T^r(G, M) = H_T^r(G, M(2))$ pour tout r, on se ramène à vérifier la dualité pour $r = 0$ ou 1 supposant $M = M(2)$. On peut aussi supposer que $M = M(2)$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module simple, il est alors tué par 2, c'est un $\mathbb{F}_2[G]$-module simple, la seule possibilité est $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec l'action triviale de G (cf. [30, SerreRepGp 8.3 Prop 26]). On vérifie directement que l'accouplement est parfait.

Si $M = \mathbb{Z}[G]$, alors $M \simeq Ind_1^G\mathbb{Z}$ est un module induit, donc $H_T^r(G, M) = 0$ pour $r \geqslant 1$ alors tout r grâce à la périodicité.

En général, M est un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini. $M \otimes \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}$-représentation de dimension finie de G, notant $[G] = 2$ et $\mathbb{Q} \supseteq \mu_2(\bar{\mathbb{Q}})$, toutes les $\mathbb{C}$-représentations de G peuvent être définies sur $\mathbb{Q}$ grâce au théorème de Brauer (cf. [30, SerreRepGp 12.3]), et alors tout $\mathbb{Q}$-représentation est contenue dans $\mathbb{Q}[G]$. Alors, il existe $m, r, s \in \mathbb{N}$ tels que $(\mathbb{Z}^m \oplus M) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^r \oplus \mathbb{Q}[G]^s \simeq (\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}[G]^s) \otimes \mathbb{Q}$ comme $\mathbb{Q}[G]$-module, il existe donc un sous-$\mathbb{Z}[G]$-module N_1 d'indice fini dans $\mathbb{Z}^m \oplus M$ et un sous-$\mathbb{Z}[G]$-module N_2 d'indice fini dans $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}[G]^s$ qui sont isomorphes comme $\mathbb{Z}[G]$-modules. Alors on arrive l'assertion par les discussions ci-dessus et par dévissage. □

2.2.2 Caractéristique d'Euler-Poincaré locale

Corps locaux non-archimédiens

Soit K un corps local non-archimédien avec groupe de Galois absolu G et corps résiduel k. On sait que $scd(G) = 2$, alors pour $r \geqslant 3$ $H^2(G, M) = 0$. Si M est fini d'ordre non-divisible par $car(K)$, tous les H^* sont finis (cf.2.2.1), on définit alors la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G, M) = \frac{[H^0(G,M)][H^2(G,M)]}{[H^1(G,M)]}$

Théorème 2.2.6. *Si M un G-module discret fini d'ordre m non-divisible par $car(K)$. Alors*

$$\chi(G, M) = [\mathcal{O}_K : m\mathcal{O}_K]^{-1} = |m|_K.$$

La démonstration n'est pas simple, d'abord on montre le cas particulier $car(k) \nmid m$, ensuite on va utiliser quelques lemmes de la théorie des représentations des groupes finis pour compléter la preuve.

Lemme 2.2.7. *Si $car(k) = p \nmid m$, alors $\chi(G, M) = 1$*

Démonstration. On note $I = Gal(K^s/K^{nr})$ le groupe d'inertie. On sait que il y a un unique p-sous-groupe de Sylow I_p de I, et $I/I_p \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p \simeq \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$ (cf. [28, SerreCorpsLoc IV.2.exer]). On a $H^r(I_p, M)$ pour tout $r \geqslant 1$ car $p \nmid [M]$. La suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. 1.2.5) implique que $H^r(I, M) \simeq H^r(I/I_p, M^{I_p})$. C'est 0 pour $r \geqslant 2$ car $cd_l(I/I_p) = cd_l(\mathbb{Z}_l) = cd_l(\widehat{\mathbb{Z}}) = 1$ (cf.1.5.4). C'est fini pour tout r, en effet, on a une suite exacte $0 \to H^1(\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p, M^{I_p}) \to H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, M^{I_p}) \to H^1(\mathbb{Z}_p, N)$ (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6]) et $H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, M^{I_p})$ est fini (cf. [28, SerreCorpsLoc XIII.1]).

On sait que $H^0(G, M) = H^0(G/I, M^I)$. Notant que $G/I \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ est de dimension cohomologique 1 (cf. 1.5.4), la suite exacte de Hochschild-Serre $H^r(G/I, H^s(I, M)) \Rightarrow H^{r+s}(G, M)$ se donne une suite exacte
$0 \to H^1(G/I, M^I) \to H^1(G, M) \to H^0(G/I, H^1(I, M)) \to H^2(G/I, M^I) = 0$ et le fait que $H^2(G, M) = H^1(G/I, H^1(I, M))$ car $H^2(I, M) = 0$.

On a une suite exacte $0 \to H^0(\widehat{\mathbb{Z}}, N) \to N \overset{\sigma-1}{\to} N \to H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, N) \to 0$ pour tout $\widehat{\mathbb{Z}}$-module discret fini N (cf. [28, SerreCorpsLoc XIII.1]), où σ est un générateur de $\widehat{\mathbb{Z}}$. Alors $[H^0(\widehat{\mathbb{Z}}, N)] = [H^1(\widehat{\mathbb{Z}}, N)]$. En particulier, pour $N = H^1(I, M)$ et $N = M^I$, on obtient $\chi(G, M) = \frac{[H^0(G,M)][H^2(G,M)]}{[H^1(G,M)]} = \frac{[H^0(G/I,M^I)][H^1(G/I,H^1(I,M))]}{[H^1(G/I,M^I)][H^0(G/I,H^1(I,M))]} = 1$ □

D'après le lemme, on peut se ramener au cas où $car(K) = 0$, $car(k) = p$ et $p \mid m = [M]$. On note que l'égalité $\chi(G, M) = |[M]|_K$ est additive en M, et $M \simeq \bigoplus_{l \ prime,\ l|m} M(l)$, alors grâce au lemme on peut supposer $M = M(p)$. On a les suites exactes de G-modules discrets $0 \to K_r \to p^{r-1}M \to p^r M \to 0$ avec les noyaux K_r tués par p, notant que $p^r M = 0$ pour $r >> 0$ car $M = M(p)$ est fini on se ramène au cas où $M = M(p)$ est tué par p.

Maintenant on prend L une extension finie galoisienne de K telle que $G_L = Gal(K^s/L)$ agisse trivialement sur M, on note $\bar{G} = Gal(L/K)$, alors M est un $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module fini. On note le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-modules de type fini (i.e. fini, car $\bar{G}$ est fini) par $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$. Alors $\chi_1 : M \mapsto \chi(G, M)$ et $\chi_2 : M \mapsto |[M]|_K$ définissent deux homomorphismes $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to \mathbb{Q}_{>0}$, on va montrer $\chi_1 = \chi_2$. Parce que $\mathbb{Q}_{>0}$ est sans torsion, il suffit de montrer que χ_1 et χ_2 sont coïncidents sur un ensemble des générateurs (comme groupe abélien) de $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \otimes \mathbb{Q}$.

Lemme 2.2.8. *Soit G un groupe fini avec sous-groupe H. On a un foncteur exact $Ind_H^G : M \mapsto \mathbb{F}_p[G] \otimes_{\mathbb{F}_p[H]} M$ de la catégorie des $\mathbb{F}_p[H]$-modules vers la catégorie des $\mathbb{F}_p[G]$-modules, qui définit un homomorphisme $R_{\mathbb{F}_p}(H) \to R_{\mathbb{F}_p}(G)$ et ensuite $Ind_H^G : R_{\mathbb{F}_p}(H) \otimes \mathbb{Q} \to R_{\mathbb{F}_p}(G) \otimes \mathbb{Q}$. Alors $R_{\mathbb{F}_p}(G) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par les images des Ind_H^G où H parcourant l'ensemble des sous-groupes cycliques de G d'ordre non-divisible par p.*

Démonstration. [3]

Équivalentement, on va montrer que l'application

$$Ind_X = \bigoplus_{H \in X} Ind_H^G : \bigoplus_{H \in X} R_{\mathbb{F}_p}(H) \otimes \mathbb{Q} \to R_{\mathbb{F}_p}(G) \otimes \mathbb{Q}$$

est surjective, où $X = \{H; H \leqslant G,\ H \text{ est cyclique et } p \nmid [H]\}$, $R_F(G)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie de $F[G]$-modules de type fini.

D'après le théorème [30, SerreRepGp 12.5 Th.26] pour $\mathbb{Q}_p$ de caractéristique 0, on a le surjectivité de l'application $Ind_{X/\mathbb{Q}_p}$ avec $X = \{\text{sous-groupe cyclique de } G\}$. D'après [30, SerreRepGp 12.5 Th.26], l'application $R_{\mathbb{Q}_p}(G) \to R_{\mathbb{F}_p}(G)$ est surjective, du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{H\in X} R_{\mathbb{Q}_p}(H) \otimes \mathbb{Q} & \twoheadrightarrow & R_{\mathbb{Q}_p}(G) \otimes \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow\!\!\downarrow \\ \bigoplus_{H\in X} R_{\mathbb{F}_p}(H) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{Ind_X} & R_{\mathbb{F}_p}(G) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

on trouve que l'application Ind_X est surjective, mais le X n'est pas celui que l'on veut, on va le modifier.

Pour $H \in X$, $H = H_0 \times H_p$ où H_p est le sous-groupe unique p-Sylow. Soit $M \neq 0$ un $\mathbb{F}_p[H]$-module de type fini simple. Ce n'est pas difficile à montrer que $M^{H_p} \neq 0$ (cf. [22, NSW 1.7.4]). Comme M est simple, on a $M = M^{H_p}$, i.e. H_p agit trivialement sur M. Alors $Ind_{H_0}^H Res_H^{H_0} M \simeq M \otimes \mathbb{F}_p[H_p]$ comme $\mathbb{F}_p[H_p]$-modules, où $Res_H^{H_0} M$ est M vu comme un H_0-module. On trouve donc la classe de $Ind_{H_0}^H Res_H^{H_0} M$ est la même que celle de $M^{\oplus n}$ où n est la cardinalité de H_p. Donc les images de $R_{\mathbb{F}_p}(H) \otimes \mathbb{Q}$ et de $R_{\mathbb{F}_p}(H_0) \otimes \mathbb{Q}$ sous l'application $Ind \otimes \mathbb{Q}$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G) \otimes \mathbb{Q}$ sont la même, alors on peut remplacer chaque H par H_0 associé, on peut supposer que X contient les sous-groupes cycliques de G d'ordre non-divisible par p. □

[3] Dans les livres [19, MilneADT] et [22, NSW], les deux démonstrations ne sont pas complets. Les deux preuves se donnent le fait que si X est l'ensemble des sous-groupes cycliques de G d'ordre non-égale à puissance de p, alors Ind_X est surjective. Il ne suffit pas encore, car c'est possible qu'il y a sous-groupe H de G d'ordre divisible par p mais pas égale à puissance de p. La démonstration ici suit celle de l'errata [26, Errata] de [22, NSW].

D'après le lemme, il suffit de vérifier $\chi_1 = \chi_2$ sur M de la forme $Ind_H^{\bar{G}} N$ où H est un sous-groupe cyclique d'ordre non-divisible par p. On sait que $M = Ind_H^{\bar{G}} N \simeq Ind_{G_{K'}}^{G_K} N$, où $K' = L^H$, alors $H^i(G_K, M) = H^i(G_K, Ind_{G_{K'}}^{G_K} N) \simeq H^i(G_{G'}, N)$, et $\chi(G_K, M) = \chi(G_{K'}, N)$. C'est facile à voir que $[\mathcal{O}_K : m\mathcal{O}_K] = [\mathcal{O}_{K'} : n\mathcal{O}_{K'}]$ avec $n = [N]$. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer l'assertion pour N , i.e. on peut supposer $\bar{G}$ est cyclique d'ordre non-divisible par p et on va montrer l'assertion pour M

Dans ce cas, $H^s(G_L, M)$ est fini (cf. 2.2.1, car(L)=0) de p-torsion car $M = M(p)$, $H^r(\bar{G}, H^s(G_L, M)) = 0$ pour $r \geqslant 1$ car $\bar{G}$ est d'ordre non-divisible par p, on obtient alors $H^r(G_K, M) \simeq H^r(G_L, M)^{\bar{G}}$ pour tout r d'après la suite exacte de Hochschild-Serre (cf. 1.2.5).

Maintenant on définit $\chi' : R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G});\ [M] \mapsto \sum (-1)^i [H^i(G_L, M)]$, où $[-]$ note la classe d'un $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$, on peut vérifier que c'est un homomorphisme bien défini.

Lemme 2.2.9. *On a la formule*

$$\chi'(M) = -dim_{\mathbb{F}_p}(M) \cdot [K : \mathbb{Q}_p] \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]].$$

On vérifie facilement

$$\theta : R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to \mathbb{Q}_{>0};\ [N] \mapsto [H^0(\bar{G}, N)]\ l'ordre\ de\ H^0$$

est un homomorphisme bien défini (Notant que N est tué par p et $\bar{G}$ est d'ordre non-divisible par p, H^0 est le seul cohomologie non-nul). Vérifiant $\theta \circ \chi' = \chi$ et $\theta(\mathbb{F}_p[\bar{G}]) = [\mathbb{F}_p[\bar{G}]^{\bar{G}}] = [\mathbb{F}_p] = p$, on obtient finalement $\chi(M) = \theta\chi'(M) = p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \cdot dim(M)} = [\mathcal{O}_K : m\mathcal{O}_K]^{-1}$ d'après le lemme.

Démonstration du lemme 2.2.9. On remarque que dans ce cas $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes_{\mathbb{F}_p}$, et on le note simplement par $\otimes$.

D'abord, $H^r(G_L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes M \to H^r(G_L, M)$ est un isomorphisme. Pour le voir, on prend une résolution projective $P^\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ de $\mathbb{Z}$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}[G_L]$-modules, et vérifie $Hom_{G_L}(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes M) \simeq Hom_{G_L}(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes M$, notant que $- \otimes_{\mathbb{F}_p} M$ est un foncteur exact on passe facilement à l'assertion sur les cohomologies.

D'après l'isomorphisme précédent, on a $\chi'(M) = \chi'(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cdot [M]$, où $\cdot$ est la multiplication de l'anneau $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$. On note $M_0 = M$ le groupe avec l'action de $\bar{G}$ triviale, et on sait que

$$\mathbb{F}_p[\bar{G}] \otimes M_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}_p[\bar{G}] \otimes M;\ \sigma \otimes m \mapsto \sigma \otimes \sigma m$$

est un isomorphisme des $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module, d'où $[\mathbb{F}_p[\bar{G}]] \cdot [M] = [\mathbb{F}_p[\bar{G}]] \cdot [M_0] = dim(M) \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$. Donc on se ramène au cas particulier $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Notant que (dans ce cas $-^* = Hom_{cts}(-, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = Hom(-, \mathbb{F}_p)$ la $\mathbb{F}_p$-représentation duale, N^* est un $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module si N l'est)

$H^0(G_L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$H^1(G_L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^1(G_L, \mu_p(K^s))^* = (L^*/L^{*p})^*$ (cf. 2.2.1 et 2.2.2 en cas $car(L) = 0$),

$H^2(G_L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^0(G_L, \mu_p(K^s))^* = (\mu_p(L))^*$ (cf. 2.2.2 en cas $car(L) = 0$),

on a $\chi'(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = [(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*] - [L^*/L^{*p}] + [\mu_p(L)] = [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] - [L^*/L^{*p}] + [\mu_p(L)]$.

On obtient la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_L^\times/\mathcal{O}_L^{\times p} \to L^*/L^{*p} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ de $1 \to \mathcal{O}_L^\times \to L^* \xrightarrow{v_L} \mathbb{Z} \to 1$, d'où $[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] - [L^*/L^{*p}] = -[\mathcal{O}_L^{\times(p)}]$, et alors $\chi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = -[\mathcal{O}_L^{\times(p)}] + [\mu_p(L)] = -[\mathcal{O}_L^{\times(p)}] + [(\mathcal{O}_L^\times)_p]$.

On note $V = 1 + \mathfrak{m}_L^n$, c'est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini avec $[\mathcal{O}_L : V]$ fini. D'après le lemme suivant, on a $-[\mathcal{O}_L^{\times(p)}] + [(\mathcal{O}_L^\times)_p] = -[V^{(p)}] + [V_p]$.

L'application $log : V = 1 + \mathfrak{m}_L^n \to \mathfrak{m}_L^n$ est un isomorphisme des $\mathbb{Z}_p[\bar{G}]$-modules lorsque $n >> 0$, $\mathfrak{m}_L^n$ est d'indice fini dans $\mathcal{O}_L$ de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, alors $-[V^{(p)}] + [V_p] = -[\mathcal{O}_L^{(p)}] + [(\mathcal{O}_L)_p]$ d'après le lemme suivant 2.2.10.

Le théorème de la base normale implique qu'il existe qu'un élément $u \in \mathcal{O}_L$ tel que $L \simeq \bigoplus_{\sigma\in\bar{G}} K\sigma u$ comme $\bar{G}$-module, alors $M := \bigoplus_{\sigma\in\bar{G}} \mathcal{O}_K\sigma u \subseteq \mathcal{O}_L$ d'indice fini est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Alors $-[\mathcal{O}_L^{(p)}] + [(\mathcal{O}_L)_p] = -[M^{(p)}] + [M_p]$ d'après le lemme suivant.

On sait que $M_p = 0$ car $M \subseteq L$ et $car(L) = 0$. $M^{(p)} \simeq \bigoplus_\sigma (\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\sigma u \simeq \bigoplus_\sigma \mathbb{F}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}\sigma u \simeq (\mathbb{F}_p[\bar{G}])^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ comme $\mathbb{Z}_p[\bar{G}]$-modules, alors comme $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-modules. Alors $\chi'(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = -[M^{(p)}] + [M_p] = -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]]$. Le dual de la $\mathbb{F}_p$-représentation régulière de $\bar{G}$ est lui-même, alors $\chi'(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]^*] = -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]]$. □

Lemme 2.2.10. *Soient $V \subseteq W$ deux $\mathbb{Z}_p[G]$-module de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ avec G un groupe fini et $[W : V]$ fini, alors $[V_p] - [V^{(p)}] = [W_p] - [W^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G)$.*

Démonstration. D'abord, on remarque que si A est un $\mathbb{Z}_p[G]$-module de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, alors c'est de type fini comme $\mathbb{Z}_p[G]$-module car G est un groupe fini. De plus, si A est tué par p, c'est un $\mathbb{F}_p[G]$-module de type fini. Alors les $[V_p]$, $[V^{(p)}]$, $[W_p]$ et $[W^{(p)}]$ sont dans $R_{\mathbb{F}_p(G)}$.

Si $pW \subseteq V \subseteq W$ de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V & \to & W & \to & W/V & \to & 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p=0 & & \\ 0 & \to & V & \to & W & \to & W/V & \to & 0 \end{array}$$

induit une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[G]$-modules finis $0 \to V_p \to W_p \to W/V \to V^{(p)} \to W^{(p)} \to W/V \to 0$, dont tous les terme sont $\mathbb{F}_P[G]$-module. Alors $[V_p] - [V^{(p)}] = [W_p] - [W^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G)$.

En général, W/V est un Z_p-module fini, notant que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau principal on a $[W : V] = p^s$, $V \supseteq p^s W$. On a

$$\begin{array}{ccccccccc} W \supseteq & pW \supseteq & p^2W \supseteq & \cdots \supseteq & p^sW & , \\ & & & & \| & \\ V \supseteq & V \cap pW \supseteq & V \cap p^2W \supseteq & \cdots \supseteq & V \cap p^sW & \end{array}$$

avec $p^iW \supseteq p^{i+1}W \supseteq p \cdot p^iW$ et $V \cap p^iW \supseteq V \cap p^{i+1}W \supseteq p(V \cap p^iW)$, alors la preuve est complète. □

Corps locaux archimédiens

Pour les corps locaux $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on a

Théorème 2.2.11. *Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $G = G_K$ le groupe de Galois absolu. Pour tout G-module discret fini M d'ordre m, on a*

$$\frac{[H^0(G, M)][H^0(G, M^D)]}{[H^1(G, M)]} = |m|_v,$$

où $|m|_{\mathbb{R}} = m$ et $|m|_{\mathbb{C}} = m^2$.

Démonstration. Comme M est fini, on a $[M] = [M^D] = m$. Pour $K = \mathbb{C}$, on sait que $H^0(G, M) = M$, $H^0(G, M^D) = M^D$ et $H^1(G, M) = 0$, alors la formule marche bien. Pour $K = \mathbb{R}$, $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est cyclique, alors $H_T^r(G, M)$ est de période 2 et $H_T^0(G, M) = M^G/NM$, $H_T^{-1}(G, M) = ker(N)/I$ (cf. 1.2), en particulier, ils sont finis. Suppose $G = \{1_G, \sigma\}$, pour $m \in M$ et $f \in M^D$ on a $((1 - \sigma)f)(m) = \frac{f(m)}{\sigma f(\sigma^{-1}m)} = f(m)f(\sigma m) = f((1 + \sigma)m)$, c'est-à-dire que $1 - \sigma : M^D \to M^D$ et $N = 1 + \sigma : M \to M$ sont adjointes. Sous l'accouplement $M^D \times M \to \mathbb{C}^*$ $ker(1 - \sigma) = (M^D)^G$ et NM sont donc exactement annihilateurs l'un de l'autre. Notant $[M] = [M^D]$, on obtient $[M] = [(M^D)^G][NM] = [H^0(G, M^D)]\frac{[H^0(G,M)]}{[H_T^0(G,M)]}$. Le quotient de Herbrand est 1 car M est fini, alors $[H_T^0(G, M)] = [H_T^1(G, M)] = [H^1(G, M)]$. On obtient $\frac{[H^0(G,M)][H^0(G,M^D)]}{[H^1(G,M)]} = m$. □

2.3 Application aux variétés abéliennes

On va appliquer le théorème de dualité sur corps locaux aux variétés abéliennes.

Soit K un corps local non-archimédien avec groupe de Galois absolu $G = G_K$, et soit A une variété abélienne sur K.

On note A^t la variété abélienne duale, et note $H^r(Gal(K^s/K), A(K^s))$ par $H^r(K, A)$, et note Ext^*_K le foncteur Ext^* dans la catégorie des groupes algébriques sur K.

Lemme 2.3.1 (Formule de Barsotti-Weil). *Soit A une variété abélienne sur K. Si K est un corps algébriquement clos arbitraire, alors*

$$A^t(K) = Ext^1_K(A, \mathbb{G}_m).$$

Démonstration. cf. [29, SerreAGCF VII.3]. □

Lemme 2.3.2. *Soit A une variété abélienne sur F. Si F est parfait, alors l'application*

$$H^r(F, A^t) \to Ext^{r+1}_F(A, \mathbb{G}_m)$$

est un isomorphisme canonique pour tout $r \geqslant 0$. En particulier, la formule de Barsotti-Weil est vraie pour tout corps parfait.

Démonstration. Maintenant F^s est algébriquement clos.

Notant que $Ext^r_{F^s}(A, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 2$ (cf. [23, Oort]), et $Hom_{F^s}(A, \mathbb{G}_m) = 0$ car A est projective et $\mathbb{G}_m$ est affine.

Il y a une suite spectrale $H^r(Gal(F^s/F), Ext^s_{F^s}(A, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow Ext^{r+s}_F(A, \mathbb{G}_m)$ (cf. [19, MilneADT I.0.17]), qui implique que $H^r(Gal(F^s/F), Ext^1_{F^s}(A, \mathbb{G}_m)) \simeq Ext^{r+1}_F(A, \mathbb{G}_m)$. La formule de Barsotti-Weil implique que $Ext^{r+1}_F(A, \mathbb{G}_m) \simeq H^r(Gal(F^s/F), A^t(F^s)) = H^r(F, A^t)$. □

Pour un corps local non-archimédien K de caractéristique 0, on a alors $Ext^1_K(G, \mathbb{G}_m) = A^t(K)$ qui est compact. D'après l'accouplement

$$Ext^r_K(A, \mathbb{G}_m) \times H^{2-r}(K, A) \to H^2(K, \mathbb{G}_m) = Br(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(cf. [19, MilneADT I.0.16]), on obtient l'application

$$\alpha^r(K, A) : Ext^r_K(A, \mathbb{G}_m) \to H^{2-r}(K, A)^*.$$

Théorème 2.3.3. *Soit K un corps local non-archimédien. Si K est de caractéristique 0, alors*

$\alpha^1(K, A) : Ext^1_K(A, \mathbb{G}_m) \to H^1(K, A)^*$ est un isomorphisme de groupes profinis,

$\alpha^2(K, A) : Ext^2_K(A, \mathbb{G}_m) \to H^0(K, A)^* = A(K)^*$ est un isomorphisme de groupes de torsion de type co-fini (i.e. le noyau de l'application $.m$ est fini pour tout entier m),

et pour $r \neq 1, 2$, $Ext^r_K(A, \mathbb{G}_m) = H^{2-r}(K, A) = 0$.

Pour la démonstration, l'idée est appliquant le théorème de dualité sur un corps local non-archimédien au module fini $A_n(K^s)$, ensuite on prend la limite à obtenir l'assertion finale.

Lemme 2.3.4. *Soit K un corps local non-archimédien de caractéristique* 0. *Alors $A(K)$ contient un sous-groupe ouvert d'indice fini isomorphe à $\mathcal{O}_K^d$, donc $\frac{[A(K)^{(n)}]}{[A(K)_n]} = [\mathcal{O}_K : n\mathcal{O}_K]^d$, où $d = dim(A)$.*

Démonstration. La théorie du logarithme implique l'existence du sous-groupe $B \simeq \mathcal{O}_K^d$ de $A(K)$ d'indice fini.

De la suite exacte $0 \to B \to A(K) \to A(K)/B \to 0$ appliquée par $.n$, on obtient $0 \to A(K)_n \to (A(K)/B)_n \to B/nB \to A(K)^{(n)} \to (A(K)/B)^{(n)} \to 0$. La finitude de $A(K)/B$ implique que $[(A(K)/B)^{(n)}] = [(A(K)/B)_n]$, alors $\frac{[A(K)^{(n)}]}{[A(K)_n]} = [B/nB] = [\mathcal{O}_K : n\mathcal{O}_K]^d$. □

Démonstration du théorème. D'après la suite exacte de variétés abéliennes $0 \to A_n \to A \xrightarrow{n} A \to 0$, on obtient

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & Ext_K^r(A,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{n} & Ext_K^r(A,\mathbb{G}_m) & \to & Ext_K^r(A_n,\mathbb{G}_m) & \to & Ext_K^{r+1}(A,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{n} \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha^r(K,A)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^r(K,A)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^r(K,A_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{r+1}(K,A)} & \\
\cdots \to & H^{2-r}(K,A)^* & \xrightarrow{n} & H^{2-r}(K,A)^* & \to & H^{2-r}(K,A_n)^* & \to & H^{1-r}(K,A)^* & \xrightarrow{n} \cdots
\end{array}$$

dont les deux lignes sont exactes, et alors

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & Ext_K^r(A,\mathbb{G}_m)^{(n)} & \to & Ext_K^r(A_n,\mathbb{G}_m) & \to & Ext_K^{r+1}(A,\mathbb{G}_m)_n & \to 0, \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha^r(K,A)^{(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^r(K,A_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{r+1}(K,A)_n} & \\
0 \to & (H^{2-r}(K,A)^*)^{(n)} & \to & H^{2-r}(K,A_n)^* & \to & (H^{1-r}(K,A)^*)_n & \to 0 \\
& \| & & & & \| & \\
& (H^{2-r}(K,A)_n)^* & & & & (H^{1-r}(K,A)^{(n)})^* &
\end{array}$$

avec les lignes exactes. Maintenant $car(K) = 0$, et A_n un groupe algébrique fini abélien sur K, d'après [19, MilneADT I.0.18 et 0.16] on a $Ext_K^r(A_n,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\simeq} Ext_{G_K}^r(A_n(K^s), K^{s*})$ et $\alpha^r(K,A_n) = \alpha^r(G_K, A_n(K^s))$ pour tout r. On sait que $A_n(K^s)$ est un G_K-module discret fini, appliquant le théorème 2.2.1 on déduit que $\alpha^r(K,A_n)$ est un isomorphisme pour tout r. Alors $\alpha^r(K,A)^{(n)}$ est injective pour tout r, qui implique l'injectivité de l'application $\varprojlim_n \alpha^r(K,A)^{(n)} : \varprojlim_n Ext_K^r(A,\mathbb{G}_m)^{(n)} \to \varprojlim_n (H^{2-r}(K,A)_n)^* = (H^{2-r}(K,A)_{tor})^*$.
$Ext_K^1(A,\mathbb{G}_m) = A^t(K)$ est un groupe profini abélien (cf. 2.3.2 et 2.3.4), alors $Ext_K^1(A,\mathbb{G}_m) \simeq \varprojlim_n Ext_K^1(A,\mathbb{G}_m)^{(n)}$ (on peut le voir par passer à son dual de Pontryagin). Donc pour $r = 1$ $\alpha^1(K,A) : Ext_K^1(A,\mathbb{G}_m) \to H^1(K,A)^*$ est une injection.

Pour $r = 0$, $Ext^0_K(A, \mathbb{G}_m) = Hom_K(A, \mathbb{G}_m) = 0$ car A est projective et $\mathbb{G}_m$ est affine. Alors on a

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Hom_K(A_n, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^1_K(A, \mathbb{G}_m)_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \simeq \downarrow \alpha^0(K, A_n) & & \downarrow \alpha^1(K,A)_n & & \\
0 \longrightarrow & & (H^2(K, A)_n)^* & \longrightarrow & H^2(K, A_n)^* & \longrightarrow & (H^1(K, A)^{(n)})^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

avec les lignes exactes, d'où $H^2(K, A)_n = 0$ d'après le lemme du serpent, et $H^2(K, A) = 0$ car H^2 est de torsion, aussi pour $r \geqslant 3$, $H^r(K, A) = 0$ car $scd(G_K) = 2$ (cf. 1.5.4). D'après le lemme 2.3.2, $Ext^{r+1}_K(A, \mathbb{G}_m) \simeq H^r(K, A^t)$ qui implique que $Ext^r_K(A, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \neq 1, 2$

On a déjà montré que $\alpha^1(K, A) : A^t(K) \to H^1(K, A)^*$ est injective, on va voir c'est surjective (alors c'est un isomorphisme car les deux groupe sont Hausdorff compacts), il suffit de voir $\alpha^1(K, A)^{(n)} : A^t(K)^{(n)} \to (H^1(K, A)^*)^{(n)} = (H^1(K, A)_n)^*$ est surjective car deux groupe sont profinis. On se ramène à voir $[A^t(K)^{(n)}] = [H^1(K, A)_n]$ car on a vu que $\alpha^1(K, A)^{(n)}$ est injective.

La théorie des variétés abéliennes se donne le fait que le noyau $(A^t)_n = ker(n : A^t \to A^t)$ est le dual de Cartier de $A_n = ker(n : A \to A)$. On note $M = A_n(K^s)$, d'après la discussion avant le théorème 1.6.5, on a $(A^t)_n(K^s) = Hom(M, K^{s*}) = M^D$, on note aussi que $A^t(K^s)_n = (A^t)_n(K^s) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2d} \simeq A(K^s)_n = A_n(K^s)$ comme groupes abéliens car $car(K) = 0$ où $d = dim(A) = dim(A^t)$. Alors $[M] = [M^D] = n^{2d}$, le lemme 2.3.4 implique

$$\frac{[A(K)^{(n)}]}{[A(K)_n]} = [\mathcal{O}_K : n\mathcal{O}_K]^d = \frac{[A^t(K)^{(n)}]}{[A^t(K)_n]}.$$

Le théorème 2.2.6 dit que $\chi(G_K, M) = \chi(G_K, M^D) = |n|^{2d}_K = [\mathcal{O}_K : n\mathcal{O}_K]^{-2d}$.

La corollaire 2.2.2 dit que
$[H^2(G_K, M)] = [H^0(G_K, M^D)] = [H^0(G_K, (A^t)_n(K^s))] = [(A^t)_n(K)]$.

Car $car(K) = 0$, K^s est algébriquement clos, on a la suite exacte $0 \to M = A_n(K^s) \to A(K^s) \xrightarrow{n} A(K^s) \to 0$, de la suite exacte cohomologie associée jusqu'à $H^3(G_K, M) = 0$ on obtient $\chi(G_K, M) = \frac{[A(K)_n][H^2(G_K, M)]}{[A(K)^{(n)}][H^1(K, A)_n]}$.

On combine les formules ci-dessus et obtient
$[H^1(G_K, A)_n] = [\mathcal{O}_K : n\mathcal{O}_K]^d [A^t(K)_n] = [A^t(K)^{(n)}]$, alors $\alpha^1(K, A)$ est un isomorphisme.

Pour voir que $\alpha^2(K, A)$ est un isomorphisme, on a le diagramme commutatif avec les lignes exactes (le « = » vient du lemme 2.3.2)

$$\begin{tikzcd}
 & & H^1(K,A^t)_n \arrow[d, equal] & . \\
0 \arrow[r] & Ext^1_K(A,\mathbb{G}_m)^{(n)} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1(K,A)^{(n)}"] & Ext^1_K(A_n,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1(K,A_n)", "\simeq"'] & Ext^2_K(A,\mathbb{G}_m)_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^2(K,A)_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (H^1(K,A)_n)^* \arrow[r] & H^1(K,A_n)^* \arrow[r] & (H^0(K,A)^{(n)})^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le fait que $\alpha^1(K,A_n)$ est un isomorphisme de groupes finis implique que $Ext^2_K(A,\mathbb{G}_m)$ et $H^0(K,A)^*$ sont de type co-fini, et que $\alpha^2(K,A)_n$ est surjective, alors $\alpha^2(K,A)$ est surjective car $H^0(K,A)^* = A(K)^*$, le dual d'un groupe profini, est de torsion. Remplaçant A par A^t dans la discussion ci-dessus, on obtient que $[H^1(K,A^t)_n] = [A(K)^{(n)}]$. Alors $\alpha^2(K,A)_n$ est aussi injective, $\alpha^2(K,A)$ est aussi injective car $H^1(K,A^t)$ est de torsion. $\alpha^2(K,A)$ est un isomorphisme de groupes de torsion. □

Corollaire 2.3.5 (Tate). *Soit K un corps local non-archimédien de caractéristique 0, alors l'accouplement $H^r(K,A^t)\times H^{1-r}(K,A)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se donne un isomorphisme de groupes profinis $A^t(K)\xrightarrow{\simeq} H^1(K,A)^*$ et un isomorphisme de groupes de torsion de type co-fini $H^1(K,A^t)\xrightarrow{\simeq} A(K)^*$, et pour $r\neq 0,1$ les $H^r(K,A)$ et $H^r(K,A^t)$ sont nuls.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3.2 $Ext^r_K(A,\mathbb{G}_m)\simeq H^{r-1}(F,A^t)$ pour tout $r\geqslant 1$, on applique directement le théorème précédent. □

Peut-être le résultat de Tate est le premier résultat des théorèmes de dualité en arithmétique.

2.4 Dualité globale

Dans cette section entière, K est un corps global de caractéristique 0 ou p. Soit S un ensemble non-vide des places de K qui contient toutes les places archimédiennes s'il existe. On note S_∞ l'ensemble des places archimédiennes dans ce cas. Si F est une extension finie de K, on note $S_F = \{\text{places de } F \text{ au-dessus celles dans} S\}$, parfois on s'écrit simplement S. Soit K_S l'extension de K dans K^s maximale non-ramifiée en dehors S. On définit $\mathcal{O}_{K,S} = \bigcap_{v\notin S}\mathcal{O}_v = \{a\in K; v(a)\geqslant 0,\ \forall v\notin S\}$ les S-entiers. On note $G_S = Gal(K_S/K)$, $H_S = Gal(K^s/K_S)$ et $G_v = Gal(K^s_v/K_v)$ où K_v est le complété de K en v.

On s'écrit $P = \{l; l \textit{ est un premier}, \; l^\infty | [G_S]\}$. Si K est un corps de fonctions, on note k le corps fini des constants de K, alors k^sK est non-ramifiée sur K, c'est-à-dire que $k^sK \subseteq K_S$, donc G_S a un quotient $Gal(k^sK/K) \simeq Gal(k^s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$, alors P contient tous les nombres premiers. Si K est un corps de nombres, pour l inversible dehors S, i.e. $l\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, S contient au mois tous les places au-dessus de l, $K(\mu_{l^\infty})$ est ramifiée possible seulement en les places au-dessus l, alors $K(\mu_{l^\infty}) \subseteq K_S$. Par comparer le groupe $Gal(K(\mu_{l^m})/K)$ avec $Gal(\mathbb{Q}(\mu_{l^m})/\mathbb{Q})$, on peut voir que $l^\infty \mid [Gal(K(\mu_{l^\infty})/K)]$, alors $P \supseteq \{l; l\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}\}$.

Attention. En général, on ne sait pas si P contient tous les nombres premiers.

Soit F une extension finie de K dans K_S. On fixe les notations suivantes,

$Id_{F,S} = coker(F^* \to \bigoplus_{w \notin S_F} \mathbb{Z})$

F_w le corps local en la place w;

$\mathcal{O}_w$ la localisation de $\mathcal{O}_F$ en la place non-archimédienne ;

$\widehat{\mathcal{O}}_w$ le complété de $\mathcal{O}_w$, l'anneau d'entiers du corps local F_w;

J_F =le groupe des idèles de F;

$J_{F,S} = \{(a_w) \in J_F; a_w = 1, \forall w \notin S\} \simeq \prod'_{w \in S} F_w^*$;

$\mathcal{O}_{F,S} = \bigcap_{w \notin S_F} \mathcal{O}_w$, les F_S-entiers ;

$U_{F,S} = \{(a_w) \in J_F; a_w \in \widehat{\mathcal{O}}_w^\times, \forall w \notin S \text{ et } a_w = 1, \forall w \in S\}$;

$E_{F,S} = \mathcal{O}_{F,S}^\times = \{x \in F; w(x) = 0, \forall w \notin S\} = F^* \cap J_{F,S}U_{F,S}$, les S_F-unités ;

On a un prolongement diagonal $E_{F,S} \hookrightarrow J_{F,S}U_{F,S} = \prod'_{w \in S} F_w^* \times \prod_{w \notin S} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times \subseteq J_F$. On définit le groupe des classes de S-idèles $C_{F,S} = J_{F,S}U_{F,S}/E_{F,S}U_{F,S} \simeq J_{F,S}/E_{F,S}$.

On note $\varinjlim_F$ la limite sur F parcourant toutes les extensions finies (galoisiennes) de K dans K_S, et on définit $J_S = \varinjlim_F J_{F,S}$, $\mathcal{O}_S = \varinjlim_F \mathcal{O}_{F,S}$, $E_S = \varinjlim_F E_{F,S}$, $U_S = \varinjlim_F U_{F,S}$ et $C_S = \varinjlim_F C_{F,S}$.

Notant que le noyau de l'application $U_{F,S} \to C_F = J_F/F^*$ est $U_{F,S} \cap F^* = 1$, on note $C_S(F) = C_F/U_{F,S}$.

Si S contient toutes les places de K, alors $K_S = K^s$, $G_S = G_K$, $J_{F,S} = J_F$, $\mathcal{O}_{F,S} = F$, $E_{F,S} = F^*$, $U_{F,S} = 0$ et $C_{F,S} = C_F$ le groupe des classes d'idèles.

Si K est un corps de nombres et $S = S_\infty$, on a $E_{F,S} = \mathcal{O}_F^\times$ et $\mathcal{O}_{F,S} = \mathcal{O}_F$.

2.4.1 Dualité pour une P-formation de classes

Premièrement, on va montrer que (G_S, C_S) est une P-formation de classes avec $C_S^{Gal(K_S/F)} = C_S(F)$. Notant que si S contient toutes les places, (G_S, C_S)

est exactement la formation de classes (G_K, C) (cf. 1.3.8(c)) avec $C_S(F) = C_F$. On étudie aussi la théorie du corps de classes global par rapport au corps en haut K_S.

Lemme 2.4.1. *On a une suite exacte*

$$0 \to C_{F,S} \to C_F/U_{F,S} \to Id_{F,S} \to 0$$

où $Id_{F,S} = coker(F^* \to \bigoplus_{w \notin S_F} \mathbb{Z})$.

En particulier, si S omet seulement nombre fini de places, alors $Id_{F,S} = 1$ et $C_{F,S} \simeq C_F/U_{F,S}$.

Démonstration. On a $F^* \cap U_{F,S} = 1$ et $J_{F,S}U_{F,S} \cap F^* = E_{F,S}$ par définition. De l'application $J_{F,S}U_{F,S} \hookrightarrow J_F$ on obtient l'exactitude de la deuxième ligne dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & U_{F,S} \arrow[r, equal] \arrow[d] & U_{F,S} \arrow[d, hook] & & \\ 0 \arrow[r] & J_{F,S}U_{F,S}/E_{F,S} \arrow[r] & C_F = J_F/F^* \arrow[r] & J_F/J_{F,S}U_{F,S}F^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Le lemme du serpent implique que la suite

$$0 \to J_{F,S}U_{F,S}/E_{F,S}U_{F,S} = C_{F,S} \to C_F/U_{F,S} = C_S(F) \to J_F/J_{F,S}U_{F,S}F^* \to 0$$

est exacte.

On sait que $J_F/J_{F,S}U_{F,S} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{w \notin S_F} \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, on déduit l'isomorphisme $J_F/J_{F,S}U_{F,S}F^* \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{w \notin S_F} \mathbb{Z}/im(F^*) = Id_{F,S}$.

Si S omet nombre fini de places, le théorème d'approximation faible implique que $Id_{F,S} = \bigoplus_{w \notin S_F} \mathbb{Z}/im(F^*) = 1$. □

Proposition 2.4.2. (G_S, C_S) *est une P-formation de classes, et* $C_S^{G_S} \simeq C_K/U_{K,S} = C_S(K)$.

Démonstration. La théorie du corps de classes global dit que (G_K, C) est une formation de classes, on vérifie par définition que G_S, C^{H_S} est une P-formation de classes car pour tout $l \in P$ on a $l^\infty \mid [G_S]$ (cf. remarque 1.3.7). Le lemme 2.4.4 suivant implique $C_S^{G_S} \simeq C_K/U_{K,S} = C_S(K)$ et $H^r(G_S, C^{H_S}) \xrightarrow{\simeq} H^r(G_S, C_S)$ pour tout $r \geqslant 1$. Ce sont aussi vrais si G_S est remplacé par un sous-groupe ouvert, parce que pour L une extension finie de K dans K_S on sait que le corps en haut $L_{S_L} = K_S$ ne change pas. Alors par définition (G_S, C_S) est une P-formation de classes. □

Proposition 2.4.3. *La suite*

$$0 \to U_S \to C^{H_S} \to C_S \to 0$$

est exacte ($S \neq \emptyset$).

Démonstration. D'après le lemme 2.4.1, on a la suite exacte

$$0 \to C_{F,S} \to C_F/U_{F,S} \to Id_{F,S} \to 0,$$

alors $0 \to C_S \to \varinjlim_F C_F/U_S \to \varinjlim_F Id_{F,S} \to 0$ est exacte.

On va montrer que (1)$\varinjlim_F C_F = C^{H_S}$ et (2)$\varinjlim_F Id_{F,S} = 0$.

(1)Soit L_2/L_1 une extension finie galoisienne avec $K \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq K^s$. On vérifie que $J_{L_1} = J_{L_2}^{Gal(L_2/L_1)}$ et $ker(J_{L_1} \hookrightarrow J_{L_2} \to C_{L_2} = J_{L_2}/L_2^*) = L_2^* \cap J_{L_1} = L_1^*$, alors $C_{L_1} \hookrightarrow C_{L_2}$ et $C_{L_1} = C_{L_2}^{Gal(L_2/L_1)}$ car $H^1(Gal(L_2/L_1), L_2^*) = 0$ par le théorème de Hilbert 90. Donc $C = \varinjlim_{K^s \supseteq L/K \ finie} C_L = \bigcup_L C_L$ et $C^{H_S} = \bigcup_{K_S \supseteq F/K finie} C_F = \varinjlim_F C_F$.

(2)On prend L l'extension maximale non-ramifiée de F satisfaisant que toutes les places non-archimédiennes de S sont déployées complètement, alors $L \subseteq K_S$. L'extension F' maximale abélienne de F dans L est l'extension maximale abélienne non-ramifiée de F satisfaisant que toutes les places non-archimédiennes de S sont déployées complètement, alors $F' \subseteq H_F$ le corps de classes de Hilbert de F, en particulier F'/F est une extension abélienne finie[4].

On a le diagramme commutatif avec les lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F^*/U_F & \longrightarrow & \bigoplus_{w \notin S_\infty} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Id_{F,S_\infty} & \longrightarrow & 0\ , \\ & & \twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & F^*/U_{F,S} & \longrightarrow & \bigoplus_{w \notin S} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Id_{F,S} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

alors φ est surjective avec noyau $ker(\varphi) = H = \bigoplus_{w \in S \setminus S_\infty} \mathbb{Z}/im(F^*)$, en particulier $Id_{F,S}$ est fini car Id_{F,S_∞} l'est[5]. La théorie du corps de classes global dit que le noyau $ker(rec : Cl(F) \xrightarrow{\simeq} Gal(H_F/F) \twoheadrightarrow Gal(F'/F))$ est le plus petit sous-groupe de $Cl(F) = \bigoplus_{w \notin S_\infty} \mathbb{Z}/im(F^*)$ contenant toutes les places non-archimédiennes dans S, i.e. le sous-groupe H. Alors on a un isomorphisme de groupes finis $Id_{F,S} \simeq Cl(F)/H \simeq Gal(L/F)^{ab} = Gal(F'/F)$.

[4]C'est vrai aussi pour un corps de fonctions, dans notre cas S est non-vide, alors $Id_{F,S}$ est le groupe de Picard d'un courbe affine, c'est fini et $[F' : F] = [Id_{F,S}]$ d'après la théorie du corps de classes.

[5]Le groupe $Id_{F,S}$ est fini aussi pour un corps de fonctions car S est non-vide ; mais Id_{F,S_∞} est le groupe de Picard d'un courbe complet, ce n'est pas fini.

On remplace F par F', et obtient $Id_{F',S_{F'}} \simeq Gal(L'/F')^{ab}$ où L' est l'extension maximale non-ramifiée de F' satisfaisant que toutes les places non-archimédiennes de $S_{F'}$ sont déployées complètement, alors par définition de F' on a $L = L'$.

On a le diagramme commutatif d'après la théorie du corps de classes (cf. [36, TateGCFT 11.3])

$$\begin{tikzcd} Id_{F,S} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & Gal(L/F)^{ab} \arrow[d, "Ver"] \\ Id_{F',S} \arrow[r, "\simeq"] & Gal(L/F')^{ab} \end{tikzcd} .$$

On sait que $[Gal(L/F), Gal(L/F)] = Gal(L/F')$, alors l'application de Verlagerung Ver est 0 (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.8] ou [1, Artin-Tate]). Donc $\varinjlim_F Id_{F,S} = 0$. $\square$

Lemme 2.4.4. *$H^r(G_S, U_S) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$, $H^r(G_S, C^{H_S}) \xrightarrow{\simeq} H^r(G_S, C_S)$ pour tout $r \geqslant 1$, et $C_S(K) \simeq C_S^{G_S}$*

Démonstration. On sait que

$$H^r(G_S, U_S) = \varinjlim_F H^r(Gal(F/K), U_{F,S}) = \varinjlim_F H^r(Gal(F/K), \prod_{w \notin S_F} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times)$$

(cf. [31, SerreCohGal I.2.1]), et que

$$H^r(Gal(F/K), \prod_{w \notin S_F} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times) = \prod_{v \notin S_K} H^r(Gal(F/K), \prod_{w|v} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times).$$

On fixe une place w au-dessus v pour chaque $v \notin S_K$, alors $Ind_{Gal(F_w/K_v)}^{Gal(F/K)} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times = \prod_{w|v} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times$ (cf. [36, TateGCFT]), alors

$$\prod_{v \notin S_K} H^r(Gal(F/K), \prod_{w|v} \widehat{\mathcal{O}}_w^\times) = \prod_{v \notin S_K} H^r(Gal(F_w/K_v), \widehat{\mathcal{O}}_w^\times)$$

d'après le lemme de Shapiro (cf. 1.2.3), dont le dernier terme (ne dépend pas du choix de w) est 0 pour $r \geqslant 1$ (cf. [27, SerreLCFT]).

Alors la suite exacte dans la proposition 2.4.3 $0 \to U_S \to C^{H_S} \to C_S \to 0$ implique que $H^r(G_S, C^{H_S}) \simeq H^r(G_S, C_S)$ pour $r \geqslant 1$ et $0 \to U_S^{G_S} = U_{K,S} \to (C^{H_S})^{G_S} = C^{G_K} = C_K \to C_S^{G_S} \to 0$, on obtient donc $C_S(K) = C_K/U_{K,S} \simeq C_S^{G_S}$. $\square$

Lemme 2.4.5. *Soit K un corps de nombres. On note D_K la composant connexe neutre de C_K et $D_S(K)$ la composant connexe neutre de $C_S(K) = C_K/U_{K,S}$. Alors $D_S(K) = D_K U_{K,S}/U_{K,S}$ est divisible et la suite*

$$0 \to D_S(K) \to C_S(K) \overset{rec}{\to} G_S^{ab} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. On considère l'application continue $\pi : C_K \to C_S(K) = C_K/U_{K,S}$. On sait que D_K la composant connexe neutre de C_K est divisible et $C_K/D_K \simeq G_K^{ab}$ (cf. 1.4.2). On note la composant connexe neutre de $C_S(K)$ par $D_S(K)$, alors il égale à l'adhérence de $\pi(D_K)$ d'après la théorie de groupes topologiques.

Le groupe $U_{K,S}$ est compact, alors l'image réciproque de π d'une partie compacte est compacte, i.e. π est une application propre, π est universellement fermée car tous les groupes considérant sont localement compacts, en particulier $\pi(D_K)$ est fermé. Alors $D_S(K) = \pi(D_K) = D_K U_{K,S}/U_{K,S}$, $D_S(K)$ est divisible car D_K l'est.

On considère $\psi : U_{K,S} \hookrightarrow J_K \twoheadrightarrow C_K$ et $rec_K : C_K \to Gal(K^{ab}/K)$. L'application rec_K est compatible avec les l'applications d'Artin locaux, alors pour $v \notin S$ le corps fixé par l'image du groupe des unités locaux est l'extension maximale non-ramifiée abélienne de K_v, donc le corps fixé par l'image de $U_{K,S}$ est l'extension maximale abélienne de K non-ramifiée en dehors S, i.e. $K^{ab} \cap K_S$, d'où l'adhérence de l'image de $U_{K,S}$ est $Gal(K^{ab}/K^{ab} \cap K_S)$, alors $im(U_{K,S}) = Gal(K^{ab}/K^{ab} \cap K_S)$ car $U_{K,S}$ est compact, son image est déjà fermée. On obtient le diagramme commutatif suivant avec les lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D_K \cap U_{K,S} \arrow[r] \arrow[d, "\psi|"] & U_{K,S} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook, "\psi"] & Gal(K^{ab}/K^{ab} \cap K_S) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_K \arrow[r] & C_K \arrow[r, "rec_K"] & Gal(K^{ab}/K) = G_K^{ab} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où ψ est injective car $K^* \cap U_{K,S} = 1$. Le lemme du serpent implique que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D_K/D_K \cap U_{K,S} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_K/U_{K,S} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & Gal(K_S \cap K^{ab}/K) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0\,. \\
& D_K U_{K,S}/U_{K,S} \arrow[d, equal] & & & \\
& D_S(K) & C_S(K) & G_S^{ab} &
\end{tikzcd}$$

□

Théorème 2.4.6. *Soit M un G_S-module discret de type fini. Pour tout $l \in P$ on a*

$$\alpha^r(G_S,M)(l) : Ext^r_{G_S}(M,C_S)(l) \to H^{2-r}(G_S,M)^*(l)$$

un isomorphisme pour $r \geqslant 1$.

Si K est un corps de fonctions, et si M est fini, $\alpha^0(G_S,M)(l)$ est aussi un isomorphisme. (Notant que dans ce cas P contient tous les nombres premiers.)

Démonstration. On veut appliquer le théorème 2.1.3.

On sait que (G_S,C_S) est une P-formation de classes d'après 2.4.2.

Si K est un corps de nombres, la suite $0 \to D_S(K) \to C_S^{G_S} \to G_S^{ab} \to 0$ est exacte avec $D_S(K)$ divisible d'après les lemmes 2.4.4 et 2.4.5. Pour $l \in P$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_S(K) & \longrightarrow & C_S^{G_S} & \longrightarrow & G_S^{ab} & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow\!\!\!\downarrow l^m & & \Big\downarrow l^m & & \Big\downarrow l^m & & \\ 0 & \longrightarrow & D_S(K) & \longrightarrow & C_S^{G_S} & \longrightarrow & G_S^{ab} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

implique que $\alpha^1(G_S,\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) : (C_S^{G_S})^{(l^m)} \xrightarrow{\simeq} (G_S^{ab})^{(l^m)}$ est un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ce sont aussi vraies si l'on remplace G_S par un sous-groupe ouvert $U = Gal(K_S/K')$, où K' est une extension finie de K dans K_S, parce que $K_S = K'_{S'_K}$ le corps en haut ne change pas.

Si K est un corps de fonctions, d'après la discussion au début de cette section P contient tous les nombres premiers. On sait que la suite $0 \to C_K \xrightarrow{rec} G^{ab} \to \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \to 0$ est exacte (cf. 1.4.2). On applique le lemme 2.4.4 et le même argument que le lemme 2.4.5, et obtient la suite exact $0 \to C_S^{G_S} \to G_S^{ab} \to \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \to 0$. Notant que $\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$ est uniquement divisible, alors on obtient que $\alpha^1(G_S,\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) : (C_S^{G_S})^{(L^m)} \xrightarrow{\simeq} (G_S^{ab})^{(l^m)}$ est un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce sont aussi vraies si l'on remplace G_S par un sous-groupe ouvert U par la même raison ci-dessus.

L'assertion vient directement du théorème 2.1.3.

Finalement, on remarque que si K est un corps de fonctions, en effet on obtient aussi que $rec_{l^m} : (C_S^{G_S})_{l^m} \to (G_S^{ab})_{l^m}$ est une bijection, cette application est la composition de $\alpha^0(G_S,\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$ avec $H^2(G_S,\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})^* \twoheadrightarrow (G_S^{ab})_{l^m}$, dont la dernière application est bijective si $scd(G_S) = 2$ (cf. la discussion avant théorème 2.1.1), elles restent vraies si l'on change G_S par un sous-groupe ouvert U car $scd(G_S) = scd(U)$ (cf. [31, SerreCohGal I.3.3]). Dans ce cas, on obtient un peut plus, $\alpha^0(G_S,M)(l)$ est bijective pour tout M fini. En effet, pour K un corps de fonctions, G_S est de dimension cohomologique stricte 2. (cf. [3, Brumer] ou [22, NSW 8.3.16]). □

2.4.2 La suite de Poitou-Tate

Soit M un G_S-module discret de type fini. On suppose que $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, en particulier pour tout $l \mid [M_t]$ on a $l \in P$. Si K est un corps de fonctions, cette hypothèse signifie que $[M_t]$ est non-divisible par $car(K)$. Si K est un corps de nombres, l'hypothèse est plus compliquée.

Pour v une place de K, on note $G_v = Gal(K_v^s/K_v)$. On pose $k(v)$ le corps résiduel et $g_v = Gal(k(v)^s/k(v)) \simeq G_v/I_v$ où I_v est le groupe d'inertie en v.

Un choix du prolongement $K^s \hookrightarrow K_v^s$ détermine l'application $G_v \to G_K \twoheadrightarrow G_S$, qui déduit l'application $H^r(G_S, M) \to H^r(G_v, M)$ qui ne dépend pas du choix du prolongement précédent. On pose

$$H^r(K_v, M) = \begin{cases} H_T^r(G_v, M) & , \quad \text{si } v =\in S^{\mathbb{R}} \text{ ou } S^{\mathbb{C}}, \\ H^r(G_v, M) & , \quad \text{si } v \text{ est non-archimédien} \end{cases}.$$

C'est-à-dire que $H^0(\mathbb{R}, M) = M^{G_{\mathbb{R}}}/N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}M$, $H^0(\mathbb{C}, M) = 0$; et pour tous les $r > 0$, $H^r(K_v, M) = H^r(G_v, M)$; pour $r < 0$, seulement les H_T^r en places réelles apparaissent.

Si v est non-archimédien et si M est non-ramifié en v i.e. $M = M^{I_v}$, alors M est un g_v-module discret, et on a $H^r(g_v, M) \to H^r(G_v, M) = H^r(K_v, M)$, l'image de cette application est notée par $H_{nr}^r(K_v, M)$. En particulier, on sait que $H_{nr}^0(K_v, M) = H^0(K_v, M) = M^{G_v}$ et $H_{nr}^1(K_v, M) \simeq H^1(g_v, M)$ car la suite $0 \to H^1(g_v, M) \to H^1(G_v, M) \to H^1(I_v, M)$ est exacte (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6]).

Si M est de torsion, alors $H_{nr}^r(K_v, M) = 0$, $\forall r \neq 0, 1$, car $cd(g_v) = cd(\widehat{\mathbb{Z}}) = 1$ (cf. 1.5.4).

Le G_S-module discret M est ramifié en nombre fini de places. En effet, on peut prendre L une extension finie de K dans K_S telle que G_L agisse trivialement sur M, si une place w de L au-dessus v est non-ramifiée sur K on a $I_v = I_w \subseteq G_L$ alors I_v agit aussi trivialement sur M, M est non-ramifié en v.

On pose alors $P_S^r(K, M) = \prod'_{v\in S} H^r(K_v, M) = \prod'_{v\in S \text{ non-ramifée}} H^r(K_v, M) \times \prod_{v\in S \text{ ramifée}} H^r(K_v, M)$ le produit restreint par rapport à $H_{nr}^r(K_v, M)$.

On a donc

$$P_S^0(K, M) = \prod_{v\in S} H^0(K_v, M)$$

muni de la topologie de produit, c'est compact si M est fini,

$$P_S^1(K, M) = {\prod_{v\in S}}' H^1(K_v, M)$$

est localement compact car $H^1(K_v, M)$ est fini (cf.2.2.1 c'est aussi fini pour $v \in S^{\mathbb{R}}$),

$$P_S^r(K,M) = \bigoplus_{v \in S} H^r(K_v, M), \ \forall r \neq 0,1, \text{ si } M \text{ est fini},$$

il est muni de la topologie discrète car $H^r_{nr}(K_v, M) = 0, \ \forall r \neq 0, 1$.

Lemme 2.4.7. *Soit M est un G_S-module discret, alors*

$$im(H^r(G_S, M) \to \prod_{v \in S} H^r(K_v, M)) \subseteq P_S^r(K, M).$$

Démonstration. Pour L une extension finie galoisienne de K dans K_S on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(Gal(L/K), M) & \longrightarrow & H^r(G_S, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^r(Gal(L_w/K_v), M) & \longrightarrow & H^r(G_v, M) \end{array}.$$

On sait que $H^r(G_S, M) = \varinjlim_L H^r(Gal(L/K), M)$ et

$$H^r(g_v, M) = \varinjlim_L H^r(Gal(k(w)/k(v)), M) = \varinjlim_L H^r(Gal(L_w/K_v), M)$$

où la deuxième limite est sur L/K non-ramifiée en v, alors pour chaque $\gamma \in H^r(G_S, M)$ on peut prendre L une extension finie galoisienne de K dans K_S telle que γ soit l'image de $\gamma' \in H^r(Gal(L/K), M)$, L/K soit non ramifiée en v pour presque tout place v, pour telle v, γ' traverse $H^r(Gal(L_w/K_v)) = H^r(Gal(k(w)/k(v)), M)$, alors l'image de γ est dans $H^r_{nr}(K_v, M)$. □

D'après le lemme précédent, on pose $\beta^r = \beta^r_S(K, M) : H^r(G_S, M) \to P^r_S(K, M)$ et $Ш^r_S(K, M) = ker(\beta^r_S(K, M))$.

Si M est fini d'ordre m, on pose $M^D = Hom(M, K_S^*) = Hom(M, E_S)$ car l'image de M est contenue dans le groupe des racines de l'unité. M^D avec l'action par conjugué est un G_S-module discret. Dans notre cas $[M]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors $Hom(M, K^{s*}) = Hom(M, K_S^*) = M^D$ car $K(\mu_m) \subseteq K_S$, et $M \simeq (M^D)^D$ comme G_S-modules. Donc d'après les théorèmes 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.5 $P^r_S(K, M)$ est le dual[6] algébrique et topologique de $P^{2-r}_S(K, M^D)$ (cf. [25, 5.1]). Alors on a l'application duale $\gamma^r_S = \gamma^r_S(K, M^D) : P^r_S(K, M^D) \to H^{2-r}(G_S, M)^*$ de $\beta^{2-r}_S(K, M)$.

Le théorème suivant est le théorème principal de dualité en arithmétique globale.

[6] Le groupe $P^1_S(K, M)$ n'est ni profini ni discret de torsion, mais on a encore $P^1_S(K, M)^* = Hom_{cts}(P^1_S(K, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_{cts}(P^1_S(K, M), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = P^1_S(K, M^D)$ car c'est un produit restreint des groupes finis.

Théorème 2.4.8 (Poitou-Tate). *Soit M un G_S-module discret fini avec l'hypothèse $[M]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors*

(a)les groupes $Ш^1_S(K,M)$ et $Ш^2_S(K,M^D)$ sont finis, il existe un accouplement canonique parfait

$$Ш^1_S(K,M) \times Ш^2_S(K,M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

(b)l'application $\beta^0_S(K,M)$ est injective, $\gamma^2_S(K,M^D)$ est surjective, et pour $r = 0,1,2$ on a

$$im(\beta^r_S(K,M)) = ker(\gamma^r_S(K,M)),$$

(c)pour $r \geqslant 3$, $\beta^r_S : H^r(G_S,M) \xrightarrow{\simeq} \prod_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,M)$ est bijective, en conséquence, on a la suite de Poitou-Tate *exacte de groupes localement compacts*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(G_S,M) \arrow[r, "\beta^0_S(K,M)"] & P^0_S(K,M) \arrow[r, "\gamma^0_S(K,M)"] & H^2(G_S,M^D)^* \arrow[d] & \\
& H^1(G_S,M^D)^* \arrow[d] & P^1_S(K,M) \arrow[l, "\gamma^1_S(K,M)"'] & H^1(G_S,M) \arrow[l, "\beta^1_S(K,M)"'] & \\
& H^2(G_S,M) \arrow[r, "\beta^2_S(K,M)"] & P^2_S(K,M) \arrow[r, "\gamma^2_S(K,M)"] & H^0(G_S,M^D)^* \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les groupes sont

fini	*profini*	*profini*
profini	*localement compact*	*discret de torsion*
discret de torsion	*discret de torsion*	*fini.*

Démonstration. On démontrera plus tard dans la section suivante l'existence de la suite exacte de Poitou-Tate. On remarque que la finitude de $Ш^1_S(K,M)$ est obtenue par la proposition suivante, et donc la finitude de $Ш^2_S(K,M)$ d'après l'accouplement parfait. (b) vient de l'exactitude de la suite de Poitou-Tate. L'exactitude de la suite de Poitou-Tate implique aussi que l'accouplement dans (a) est parfait. En effet, de la suite de Poitou-Tate on a $Ш^2_S(K,M) = ker(\beta^2_S(K,M)) = coker(P^1_S(K,M) = P^1_S(K,M^D)^* \to H^1(G_S,M^D)^*)$, c'est le dual de $ker(H^1(G_S,M^D) \to P^1_S(K,M^D)) = Ш^1_S(K,M^D)$. □

On trouvera les définitions des applications verticaux dans la démonstration, on peut aussi définir comme $coker(\gamma^0) = ker(\beta^2)^* = Ш^{2*} \overset{(a)}{=} Ш^1 \hookrightarrow H^1$ (resp.$coker(\gamma^1) \overset{(a)}{=} Ш^2 \hookrightarrow H^2$) grâce à la dualité.

Proposition 2.4.9. *Si M est de type fini avec l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors l'application $\beta^1_S(K, M)$ est propre, i.e. l'image réciproque d'un sous-ensemble compact est finie. (Si K est un corps de nombres, l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$ peut être omette.)*

On a besoin de quelques lemmes qui viennent de la théorie des nombres et la théorie de la cohomologie galoisienne.

Lemme 2.4.10. *Suppose que $S \supseteq S_\infty$ est une partie non-vide de l'ensemble des places de K. On a une suite exacte de groupes abéliens.*

$$1 \to E_{K,S_\infty} \to E_{K,S} \to \bigoplus_{v \in S \setminus S_\infty} \mathbb{Z} \to Id_{K,S_\infty} \to Id_{K,S} \to 1.$$

En particulier, $E_{K,S}$ et $Id_{K,S}$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $S = S_\infty = \emptyset$ le théorème est aussi trivialement vrai. Notant le théorème de Dirichlet sur le groupe des unités et le théorème de Minkowski sur le groupe des classes, c'est la théorie des nombres algébrique classique, on peut voir par exemple [21, NeukirchNT I.11.6]. On remarque que si K est un corps de nombres $Id_{K,S}$ est fini, si K est un corps de fonctions et si $S \neq \emptyset$, $Id_{K,S}$ est le groupe de Picard d'un courbe affine, c'est aussi fini. □

Lemme 2.4.11. *Suppose que $S \supseteq S_\infty$ est une partie finie non-vide de l'ensemble des places de K. Alors $H^1(G, E_S) = Id_{K,S}$.*

Démonstration. Par définition, on a la suite exacte $0 \to E_{F,S} \to J_{F,S} \to C_{F,S} \to 0$ pour tout F extension finie de K dans K_S, on prend $\varinjlim_F$ et obtient la suite exacte de G_S-modules discrets $0 \to E_S \to J_S \to C_S \to 0$. On obtient une suite exacte

$$0 \to E_{K,S} \to J_{K,S} \to C_S^{G_S} = C_K/U_{K,S} \to H^1(G_S, E_S) \to H^1(G_S, J_S) \to \cdots .$$

On sait que $H^1(G_S, J_S) = \varinjlim_F H^1(Gal(F/K), J_{F,S})$ et

$$\begin{aligned} H^1(Gal(F/K), J_{F,S}) &= H^1(Gal(F/K), \textstyle\prod_{w \in S_F} F_w^*) \\ &\simeq \textstyle\prod_{v \in S} H^1(Gal(F/K), \prod_{w|v} F_w^*) \\ &\simeq \textstyle\prod_{v \in S} H^1(Gal(F_w/K_v), F_w^*) = 0 \end{aligned}$$

lorsque S est fini d'après le lemme de Shapiro (cf. 1.2.3) et Hilbert 90.

Finalement, on obtient
$H^1(G_S, E_S) \simeq coker(C_{K,S} = J_{K,S}/E_{K,S} \to C_K/U_{K,S}) = Id_{K,S}$. □

Démonstration de la proposition de propreté. Premièrement, on remarque que la démonstration ci-dessous suit celle du livre [22, NSW] de manière cohomologique, où l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$ est nécessaire. Mais pour le cas où K est un corps de nombres, on a une autre démonstration appliquant le théorème d'Hermite, l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$ n'est pas nécessaire, pour plus informations on peut voir[7] [31, SerreCohGal II.6.2] ou [19, MilneADT I.4.9].

D'abord, on veut se ramener au cas où G_S agit trivialement sur M. En effet, pour tout L extension finie de K dans K_S, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^1(G_S, M) \arrow[r, "\beta^1_S(K,M)"] \arrow[d, "Res"] & P^1_S(K,M) = \prod'_{v\in S} H^1(K_v, M) \arrow[d, "Res"] \\ H^1(Gal(K_S/L), M) \arrow[r, "\beta^1_S(L,M)"] & P^1_{S_L}(L,M) = \prod'_{w\in S_L} H^1(L_w, M) \end{tikzcd}$$

et une suite exacte

$$0 \to H^1(Gal(L/K), M^{Gal(K_S/L)}) \xrightarrow{Inf} H^1(G_S, M) \xrightarrow{Res} H^1(Gal(K_S/L), M)$$

(cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6]), dont le premier terme est fini car M est de type fini. Notant que l'application verticale Res à droite est continue (car $Res_{w/v}(H^1_{nr}(K_v, M)) \subseteq H^1_{nr}(L_w, M)$), $\beta^1_S(K, M)$ est propre si $\beta^1_S(L, M)$ l'est. On peut prendre L telle que $Gal(K_S/L)$ agisse trivialement sur M, donc on peut supposer que G_S (alors G_v et g_v) agit trivialement sur M, $H^1(G_S, M) = Hom_{cts}(G_S, M)$, $H^1(K_v, M) = Hom_{cts}(G_v, M)$ et $H^1_{nr}(K_v, M) = im(Hom_{cts}(g_v, M))$.

On considère $T \subseteq S$ satisfaisant les conditions suivantes,

(1)$S \setminus T$ est un ensemble fini,

(2)$S \setminus T$ contient tous les places non-archimédiennes,

(3)$S \setminus T$ contient tous les places au-dessus $l \mid [M_t]$.

On pose $P(T) = \prod_{v\in S\setminus T} H^1(K_v, M) \times \prod_{v\in T} H^1_{nr}(K_v, M)$, c'est compact car chaque terme l'est (cf. 2.2.1, [28, SerreCorpsLoc XIII.1] et notant que $Hom_{cts}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0$). Par définition du produit restreint, pour montrer que $\beta^1_S(K, M)$ soit propre, il suffit de montrer que $(\beta^1_S)^{-1}(P(T))$ soit fini. Pour $f \in H^1(G_S, M) = Hom_{cts}(G_S, M)$, i.e. $f : G_S \to M$, $f \in (\beta^1_S)^{-1}(P(T))$ si et seulement si $\beta^1_S(f)_v \in H^1_{nr}(K_v, M) = im(Hom_{cts}(g_v, M))$ pour tout $v \in T$, c'est-à-dire que $f(I_v) = 0$ ou également $K_S^{I_v} \supseteq K_S^{ker(f)}$, si et seulement

[7]On remarque que dans ces livres la démonstration marche aussi pour M de type fini car $Hom_{cts}(G, \mathbb{Z}) = 0$ pour n'importe quel groupe profini G.

si $K_S^{ker(f)}/K$ est non-ramifiée en tout $v \in T$. On pose $K_{S\setminus T}$ l'extension maximale de K non-ramifiée en dehors $S \setminus T$. Donc $f \in (\beta_S^1)^{-1}(P(T))$ si et seulement si $K_S^{ker(f)} \subseteq K_{S\setminus T}$, i.e. $ker(f) \supseteq Gal(K_S/K_{S\setminus T})$, $f \in Hom_{cts}(Gal(K_{S\setminus T}/K), M) \subseteq Hom_{cts}(G_S, M)$, c'est-à-dire que $f \in H^1(Gal(K_{S\setminus T}/K), M) \subseteq H^1(G_S, M)$. On va prouver que $H^1(Gal(K_{S\setminus T}/K), M)$ est fini.

On note $Gal(K_{S\setminus T}/K)$ simplement par G. Pour $M = \mathbb{Z}$, $H^1(G, M) = 0$ car G est profini. On se ramène donc au cas où M est fini d'ordre m. On sait que $K(\mu_m) \subseteq K_{S\setminus T}$ d'après la condition (3) ci-dessus. On pose L la clôture galoisienne de $K(\mu_m)$, c'est facile à voir que $L \subseteq K_{S\setminus T}$ et finie sur K. On a la suite spectrale de Hochschild-Serre 1.2.5

$$H^r(Gal(L/K), H^s(Gal(K_{S\setminus T}/L), M)) \Rightarrow H^{r+s}(Gal(K_{S\setminus T}/K), M),$$

on se ramène alors à voir que $H^1(Gal(K_{S\setminus T}/L), M)$ est fini car $Gal(L/K)$ est un groupe fini. C'est-à-dire que l'on peut supposer $L = K \supseteq \mu_m$.

Maintenant, M est isomorphe comme G-module trivial à une somme directe finie de μ_{l^r} avec $l^r \mid m$. Par la suite exacte $1 \to \mu_l \to \mu_{l^{s+1}} \to \mu_{l^s} \to 1$, on se ramène facilement au cas $M = \mu_l$. Notant que $E_{S\setminus T}$ est l-divisible car $E_{F,S\setminus T}$ l'est pour $K \subseteq F \subseteq K_{S\setminus T}$, on considère la suite exacte $1 \to \mu_l \to E_{S\setminus T} \xrightarrow{l} E_{S\setminus T} \to 1$. On déduit de la suite de cohomologie associée la suite exacte

$$1 \to E_{K,S\setminus T}/(E_{K,S\setminus T})^l \to H^1(G, \mu_l) \to H^1(G, E_{S\setminus T})_l \to 0.$$

D'après le lemme 2.4.11, on obtient la suite exacte

$$1 \to E_{K,S\setminus T}^{(l)} \to H^1(G, \mu_l) \to (Id_{K,S\setminus T})_l \to 0.$$

D'après le lemme 2.4.10, on déduit que $E_{K,S\setminus T}$ et $Id_{K,S\setminus T}$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$, donc $H^1(G, \mu_l)$ est fini, la démonstration est complète. □

Conséquences

Corollaire 2.4.12. *Si S est fini, M est un G_S-module discret fini avec l'hypothèse $[M]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors $H^r(G_S, M)$ est fini pour tout r.*

Démonstration. Maintenant S est fini, le théorème 2.2.1 implique que $P_S^r(K, M)$ est fini pour $r = 0, 1, 2$ (notant que les facteurs des places réelles sont toujours finis). Pour $r = 0$ la finitude de $H^0(G_S, M)$ vient de la suite de Poitou-Tate. Pour $r = 1, 2$ on a $0 \to Ш_S^1(K, M) \to H^r(G_S, M) \to P_S^r(K, M)$, la finitude de $Ш_S^r$ implique que $H^r(G_S, M)$ est aussi fini. Pour les autre r, il reste seulement les facteurs des places réelles qui sont toujours finis. □

Corollaire 2.4.13. *Soit M un G_S-module discret avec l'hypothèse $[M]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$. Pour tout partie finie T de S telle que $S \setminus T$ contienne au moins une place non-archimédienne, l'application $H^2(G_S, M) \to \bigoplus_{v\in T} H^2(K_v, M)$ est surjective. En particulier, si K est un corps de nombres, $H^2(G_S, M) \to \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^2(K_v, M)$ est surjective (car $S = S_\infty$ implique que $M = 0$).*

Démonstration. On fixe une place non-archimédienne $v \in S \setminus T$, il suffit de montrer que pour tout $a = (a_v) \in P^2_S(K, M)$ c'est possible à changer a_{v_0} tel que a soit dans l'image de $\beta^2_S(K, M)$ (en conséquence, $H^2(G_S, M) \twoheadrightarrow \bigoplus_{v\in S\setminus\{v_0\}} H^2(K_v, M)$, est surjective, donc c'est surjective sur $\bigoplus_{v\in T} H^2(K_v, M)$ car $T \subseteq S \setminus \{v_0\}$.)

La suite de Poitou-Tate implique que

$$im(\beta^2_S(K, M)) = ker(\gamma^2_S(K, M)) = (coker(\beta^0_S(K, M^D)))^*,$$

donc sous l'accouplement $P^2_S(K, M) \times P^0_S(K, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $im(\beta^2_S(K, M))$ et $im(\beta^0_S(K, M^D))$ sont exactement annihilateurs l'un de l'autre. Maintenant $a \in P^2_S(K, M)$, on prend $\chi_a =< a, - >: P^0_S(K, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et pose $\chi'_a = \chi_a \circ \beta^0_S(K, M^D) : H^0(G_S, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Par définition $H^0(G_S, M^D) \hookrightarrow H^0(K_{v_0}, M^D)$ est injective, alors χ'_a s'étend à un caractère $\chi'' : H^0(K_{v_0}, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injective. On obtient un élément $a'_{v_0} \in H^2(K_{v_0}, M) \simeq H^0(K_{v_0}, M^D)^*$ associé à χ''. On pose donc $a' = (a'_v)$ où $a'_v = a'_{v_0}$ si $v = v_0$ et $a'_v = 0$ sinon. On obtient un caractère associé à a', $\chi'_{a'} : H^0(G_S, M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et on a $\chi''|H^0(G_S, M^D) = \chi'_{a'}$ par construction. On vérifie que pour tout $u \in H^0(G_S, M^D)$ on a $< a-a', \beta^0_S(K, M^D)(u) >= 0$ alors $a - a' \in im(\beta^0_S(K, M^D))^\perp = im(\beta^2_S(K, M))$. □

Corollaire 2.4.14. *Soit K un corps de nombres, on a*

$H^0(G_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,

$H^2(G_K, \mathbb{Z}) = Hom_{cts}(C_K/D_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$,

$H^{2r}(G_K, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t$ *pour* $2r \geqslant 4$ *où* t *=nombre des places réelles de* K,

$H^r(G_K, \mathbb{Z}) = 0$ *pour* r *impaire.*

Démonstration. Pour $r \leqslant 2$, il suit de la suite de cohomologie de $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ et la théorie du corps de classes global $G^{ab}_K \simeq C_K/D_K$ (cf. théorème 1.4.2). Il existe un sous-groupe ouvert U de G_K d'indice 2 tel que $scd(U) = 2$ (on prend $L = K(\sqrt{-1})$ totalement imaginaire et $U = G_L$, cf. par exemple [19, MilneADT I.1.12] ou meilleur [22, NSW 10.2.3]). On a donc $H^r(G_K, \mathbb{Z}[G_K/U]) = H^r(G_K, Ind^{G_K}_U \mathbb{Z}) \simeq H^r(U, \mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 3$. On a un suite exacte de G_K-modules $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1+\sigma} \mathbb{Z}[G_k/U] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G_K/U] \xrightarrow{deg} \mathbb{Z} \to 0$

où $G_K/U = \{1,\ \sigma\}$, on obtient deux suites exactes $0 \to \mathbb{Z} \overset{1+\sigma}{\to} \mathbb{Z}[G_k/U] \overset{1-\sigma}{\to} N \to 0$ et $0 \to N \to \mathbb{Z}[G_K/U] \overset{deg}{\to} \mathbb{Z} \to 0$, les suites de cohomologie se donnent un isomorphisme $H^r(G_K,\mathbb{Z}) \simeq H^{r+2}(G_K,\mathbb{Z})$ pour tout $r \geqslant 3$.

On sait que pour $r \geqslant 4$,

$$\begin{aligned} H^r(G_K,\mathbb{Z}) = H^{r-1}(G_K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &= \varinjlim_n H^{r-1}(G_K, \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \\ &\simeq \varinjlim_n \textstyle\prod_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^{r-1}(K_v, \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \\ &= \textstyle\prod_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

d'après théorème 2.4.8(c). Or $H^r(\mathbb{R},\mathbb{Z}) = 0$ (resp. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si r est impaire (resp. paire), la démonstration est complète. □

Remarque 2.4.15. La suite de Poitou-Tate est fonctorielle en K, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif, où F est une extension finie de K dans K_S et $U_S = Gal(K_S/F)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(G_S,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & P^0_S(K,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & H^2(G_S,M^D)^* \arrow[r] \arrow[d, "Cores^*"] & H^1(G_S,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & P^1_S(K,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & {} \\ 0 \arrow[r] & H^0(U_S,M) \arrow[r] & P^0_S(F,M) \arrow[r] & H^2(U_S,M^D)^* \arrow[r] & H^1(U_S,M) \arrow[r] & P^1_S(F,M) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H^1(G_S,M^D)^* \arrow[r] \arrow[d, "Cores^*"] & H^2(G_S,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & P^2_S(K,M) \arrow[r] \arrow[d, "Res"] & H^0(G_S,M^D)^* \arrow[r] \arrow[d, "Cores^*"] & 0 \\ {} \arrow[r] & H^1(U_S,M^D)^* \arrow[r] & H^2(U_S,M) \arrow[r] & P^2_S(F,M) \arrow[r] & H^0(U_S,M^D)^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(c'est facile à vérifier par fonctorialité de la définition de l'accouplement de Yoneda).

2.4.3 Démonstration du théorème principal

Dans cette section entière, on va combiner les résultats précédents pour montrer le théorème de Poitou-Tate 2.4.8.

Soit M un G_S-module discret de type fini avec l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors $M^D = Hom(M, K_S^*)$ est un G_S-module discret. On pose $M^d = Hom(M, E_S)$ comme un G_S-module, $M^d = Hom(M, K_v^{s*})$ comme un G_v-module et $M^d = Hom(M, \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times})$ comme un g_v-module si M est non-ramifié en v. On peut définir $P^r_S(K, M^d)$.

Dans le cas M fini, $M^D = Hom(M, K_S^*) = M^d = Hom(M, E_S)$ comme G_S-module. Si $v \notin S$, M est non-ramifié en v, c'est un g_v-module, on sait que $M^d = Hom(M, \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times}) = M^D$ parce que l'hypothèse implique que les racines m^{ime} de l'unité sont contenues dans $\widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times}$. Si $v \in S$, on sait aussi que $M^D = Hom(M, K_v^{s*}) = M^d$. Autrement dire, quand M est fini d'ordre

m tel que $m\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, toutes les notations M^d et M^D sont la même, i.e. $M^D = Hom(M, K_S^*)$ vu comme G_S-module, G_v-module et g_v-module.

D'abord, on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 2.4.16. *Soit M un G_S-module discret de type fini avec l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, alors*

(a)pour $r \geqslant 0$, $Ext^r_{G_S}(M, E_S) = H^r(G_S, M^d)$,

(b)$H^r(g_v, M^d) = Ext^r_{g_v}(M, \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times})$ pour $v \notin S$, de plus, ce sont 0 pour $r \geqslant 2$.

Démonstration. (a)D'après 1.2.6, il suffit de voir que E_S est divisible par $m = [M_t]$. En effet, on prend $u \in E_S$, pour tout $v \notin S$, $k(v)(\sqrt[m]{\bar{u}})/k(v)(\bar{u})$ est séparable d'après l'hypothèse $m\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$. Alors $K_v(\sqrt[m]{u})/K_v(u)$ est non-ramifiée, on a donc $\sqrt[m]{u} \in K_S$, Alors $\sqrt[m]{u} \in E_S$, E_S est divisible par m.

(b)L'argument similaire déduit que $\widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times}$ est divisible par m et alors $H^r(g_v, M^d) = Ext^r_{g_v}(M, \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times})$ d'après 1.2.6. Comme le g_v-module $\widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times}$ est de cohomologie triviale (cf. [27, SerreLCFT 1.2] pour niveaux finis, ensuite on prend la limite inductive), il existe une suite exacte $0 \to \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times} \to I^0 \to I^1 \to 0$ avec I^0 et I^1 deux $\mathbb{Z}[g_v]$-modules injectives (cf. [28, Serre-CorpsLoc IX.6.th.11], l'argument d'algèbre homologique marche aussi pour le cas profini), donc $Ext^r_{g_v}(M, \widehat{\mathcal{O}}_v^{nr\times}) = 0$ pour $r \geqslant 2$. (Si M est fini, c'est plus facile, $cd(g_v) = 1$ implique que $H^r(g_v, M^d) = 0$ pour $r \geqslant 2$.) $\square$

Lemme 2.4.17. *Si S contient presque toutes les places, alors $\varinjlim_F F_w = K_v^s$ où F parcourant toutes les extensions finies galoisiennes de K dans K_S, w est une place de F au-dessus v.*

Démonstration. Si v est une place réelle, on peut prendre un entier $n \geqslant 3$ inversible dans $\mathcal{O}_{K,S}$ car S contient presque toutes les places. On pose $F = K(\mu_n)$, c'est une extension finie galoisienne totalement imaginaire de K dans K_S, alors $F_w = K_v^s = \mathbb{C}$.

On fixe $v \in S$ une place non-archimédienne, et on fixe $x_v \in K_v^s$ dont polynôme minimal $f_v \in K_v[X]$ de degré n. Pour chaque $w \notin S$ (de nombre fini), il existe une extension $K_w[X]/(f_w)$ unique séparable non-ramifiée de K_w de degré n. Le théorème d'approximation faible dit qu'il existe $f \in K[X]$ de degré n tel que f soit assez proche à f_w dans $K_w[X]$ pour chaque $w \notin S$ et assez proche à f_v dans $K_v[X]$, le lemme de Krasner implique que $K_w[X]/(f) \simeq K_w[X]/(f_w)$ pour tout $w \notin S$ et $K_v[X]/(f) \simeq K_v[X]/(f_v)$. Alors $L = K[X]/(f)$ est non-ramifiée en $w \notin S$ et L_v contient x_v, sa clôture galoisienne F est aussi non-ramifiée en dehors S. C'est-à-dire que $\varinjlim_F F_w = K_v^s$. $\square$

Lemme 2.4.18. *Si M est fini d'ordre m inversible dans $\mathcal{O}_{K,S}$, soit $l \mid m$ un premier, alors $\varinjlim_F Br(F_w)(l) = 0$, où F parcourant toutes les extensions finies galoisiennes de K dans K_S.*

Démonstration. Pour une extension F_2/F_1 finie galoisienne on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^2(Gal(K_v^s/F_{1w_1}), K_v^{s*}) = Br(F_{1w_1}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "Res"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[F_{2w_2}:F_{1w_1}]}"] \\
H^2(Gal(K_v^s/F_{2w_2}), K_v^{s*}) = Br(F_{2w_2}) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd},$$

alors il suffit de montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$ il existe une extension F finie galoisienne de K dans K_S telle que $l^N \mid [F_w : K_v]$.

Si K est un corps de nombres et si v est une place réelle, on peut supposer que $l = 2$ est inversible dans $\mathcal{O}_{K,S}$ et on remplace $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. On pose $F = K(\mu_4)$, c'est une extension finie galoisienne de K totalement imaginaire non-ramifiée en dehors S, alors $Br(F_w) = 0$.

Si K est un corps de nombres et si v est non-archimédienne. $F_m = K(\mu_{l^m})/K$ est non-ramifiée en dehors S, alors $F_m \subseteq K_S$, $K_v(\mu_{l^m}) \subseteq F_{mw}$ et $Gal(K_v(\mu_{l^m})/K_v)$ est un quotient de $Gal(F_{mw}/K_v)$.

Cas (i) $v \in S$ est au-dessus $p \neq l$, on a un diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & K_v(\mu_{l^m}) \arrow[dl, dash, "d_1"'] \arrow[dr, dash, "d'"] & \\
K_v \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash, "d"'] & & \mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash, "d_2"] \\
 & \mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) \cap K_v \arrow[d, dash] & \\
 & \mathbb{Q}_p &
\end{tikzcd}.$$

On sait que $K_v(\mu_{l^m}) = K_v \cdot \mathbb{Q}_p(\mu_{l^m})$, $K_v(\mu_{l^m})/K_v$ et $\mathbb{Q}_p(\mu_{l^m})/\mathbb{Q}_p$ sont galoisiennes, alors $\mathbb{Q}_p(\mu_{l^m})/\mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) \cap K_v$ est galoisienne et $d_1 = [\mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) : \mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) \cap K_v] \mid d_2$, alors $d' = [K_v : \mathbb{Q}_p(\mu_{l^m}) \cap K_v] \mid [K_v : \mathbb{Q}_p] = d$. Comme $p \neq l$, on a $Gal(\mathbb{Q}_p(\mu_{l^m})/\mathbb{Q}_p) \simeq Gal(\mathbb{F}_p(\mu_{l^m})/\mathbb{F}_p)$ d'ordre d_2. On sait que $d_2 \to \infty$ lorsque $m \to \infty$, alors $d_1 \to \infty$. Notant que $d_1 \mid d_2 \mid \varphi(l^m) = l^{m-1}(l-1)$, d_1 est divisible par l^N si $m >> 0$. On trouve $F = K(\mu_{l^m}) \subseteq K_S$ et $l^N \mid [Gal(F_w/K_v)]$ pour $m >> 0$.

Cas (ii) $v \in S$ est au-dessus l. On a un diagramme similaire suivant avec $d' \mid d$ et $d_1 \mid d_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & K_v(\mu_{l^m}) \arrow[dl, dash, "d_1"'] \arrow[dr, dash, "d'"] & \\
K_v \arrow[dr, dash, "d"'] & & \mathbb{Q}_l(\mu_{l^m}) \arrow[dl, dash, "d_2"] \\
 & \mathbb{Q}_l &
\end{tikzcd}$$

On sait que $d_1 \mid \varphi(l^m) = l^{m-1}(l-1)$, $\mathbb{Q}_l(\mu_{l^m})/\mathbb{Q}_l$ est totalement ramifiée de degré $d_2 = \varphi(l^m)$, $d_2 \to \infty$ lorsque $m \to \infty$, alors $d_1 \to \infty$, d_1 est divisible par l^N si $m >> 0$.

Si K est un corps de fonctions de corps de constants k (fini), alors K_S contient k^s, on pose $F_0 = K \cdot k^s$. Pour $v \in S$, $Gal(F_{0w}/K_v)$ a un quotient $Gal(k^s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$, alors $l^\infty \mid [Gal(F_{0w}/K_v)]$. Donc pour N, il existe $F = K \cdot k'$ avec k'/k finie telle que $l^N \mid Gal(F_w/K_v)$. □

Lemme 2.4.19. *Soit M un G_S-module discret de type fini avec l'hypothèse $[M_t]\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, on suppose que soit M est fini soit S omet nombre fini de places. Alors, $Hom_{G_S}(M, J_S) = \prod_{v \in S} H^0(G_v, M^d)$ ($= P^0_S(K, M^d)$ si K est un corps de fonctions), $Ext^r_{G_S}(M, J_S) = P^r_S(K, M^d)$ pour tout $r \geqslant 1$.*

Démonstration. On prend un sous-ensemble T de S qui contient toutes les places archimédiennes satisfaisant les conditions suivantes, $v \in T$ si M est non-ramifié en v, et $v \in T$ si $m = [M_t]$ n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_v$. On pose $J_{F,S\supseteq T} = \prod_{w \in T} F^*_w \times \prod_{w \in S \setminus T} \widehat{\mathcal{O}}^\times_w$ et $J_S = \varinjlim_{F,T} J_{F,S\supseteq T}$ où et F parcourant toutes les extensions finies galoisiennes de K dans $K_T (\subseteq K_S)$ telles que $Gal(K_S/F)$ agisse trivialement sur M. La théorie d'algèbre homologique implique que $Ext^r_{G_S}(M, J_S) = \varinjlim_{F,T} Ext^r_{Gal(F/K)}(M, J_{F,S\supseteq T})$. On a

$$Ext^r_{Gal(F/K)}(M, J_{F,S\supseteq T}) =$$

$$= \prod_{v \in T} Ext^r_{Gal(F/K)}(M, \prod_{w|v} F^*_w) \times \prod_{v \in S\setminus T} Ext^r_{Gal(F/K)}(M, \prod_{w|v} \widehat{\mathcal{O}}^\times_w)$$

$$= \prod_{v \in T} Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M, F^*_w) \times \prod_{v \in S\setminus T} Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M, \widehat{\mathcal{O}}^\times_w)$$

d'après 1.2.3.

Pour $v \in S \setminus T$, M est non-ramifié en v, c'est un g_v-module, d'après 1.2.6 (prenant $M = \mathbb{Z}$, notant que $H^s(Gal(K^{nr}_v/F_w), \widehat{\mathcal{O}}^{nr\times}_v) = 0$ pour tout $s \geqslant 1$, cf. [27, SerreLCFT 1.2] pour niveaux finis, ensuite on prend la limite inductive) et 2.4.16 on a $Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M, \widehat{\mathcal{O}}^\times_w) \simeq Ext^r_{g_v}(M, \widehat{\mathcal{O}}^{nr\times}_v) = H^r(g_v, M^d)$.

On trouve que
$Ext^r_{G_S}(M,J_S) = \varinjlim_{F,T}(\prod_{v\in T} Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*) \times \prod_{v\in S\setminus T} H^r(g_v,M^d))$.

Pour $r \leqslant 1$ et $v \in T$, on a $Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*) \simeq Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*}) \simeq H^r(G_v,M^d)$ d'après 1.2.6 (prenant $M=\mathbb{Z}$ et appliquant Hilbert 90) et le fait que K_v^{s*} est divisible par $m=[M_t]$. On a donc pour $r \leqslant 1$, $Ext^r_{G_S}(M,J_S) = \varinjlim_T(\prod_{v\in T} H^r(G_v,M^d)\times\prod_{v\in S\setminus T} H^r(g_v,M^d))$. Si M est fini, les M^d sont M^D vus comme G_v-modules ou g_v-modules respectivement, alors par définition $Ext^0_{G_S}(M,J_S) = \prod_{v\in S} H^0(G_v,M^d)$ et $Ext^1_{G_S}(M,J_S) = P^1_S(K,M^d)$.

Pour $r \geqslant 2$, 2.4.16(b) implique que $H^r(g_v,M^d)=0$ pour tout $v \in S\setminus T$, alors

$$\begin{aligned} Ext^r_{G_S}(M,J_S) &\simeq \varinjlim_F \bigoplus_{v\in S} Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*) \\ &= \bigoplus_{v\in S} \varinjlim_F Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*). \end{aligned}$$

Si S contient presque toutes les places, $\varinjlim_F F_w = K_v^s$ d'après 2.4.17, alors $\varinjlim_F Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*) = Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*})$.

Si M est fini et $v \in S$, pour tout premier $l \mid [M]$, S contient toutes les places au-dessus l, alors $\varinjlim_F H^2(Gal(K_v^s/F_w),K_V^{s*})(l) = \varinjlim_F Br(F_w)(l) = 0$ d'après 2.4.18. On a une suite spectrale
$Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,H^s(Gal(K_v^s/F_w),K_v^{s*})) \Rightarrow Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*})$ d'après 1.2.6, et on sait que[8]

$$H^s(Gal(K_v^s/F_w),K_v^{s*}) = \begin{cases} F_w^* & , \text{ si } s=0, \\ 0 & , \text{ si } s=1 \text{ ou } s\geqslant 3, \end{cases}$$

alors $Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*}) \simeq \frac{Ext^r_{Gal(Fw/Kv)}(M,F_w^*)}{im(Ext^{r-3}_{Gal(Fw/Kv)}(M,H^2(Gal(K_v^s/F_w),K_v^{s*}))))}$, prenant $\varinjlim_F$ on trouve $\varinjlim_F Ext^r_{Gal(F_w/K_v)}(M,F_w^*) = Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*})$ car c'est vrai pour la partie l-primaire.

Maintenant $r \geqslant 2$, $Ext^r_{G_v}(M,K_v^{s*}) \simeq H^r(G_v,M^d) = H^r(K_v,M^d)$ d'après 1.2.6, alors aux deux cas ci-dessus $Ext^r_{G_S}(M,J_S) = \bigoplus_{v\in S} H^r(K_v,M^d) = P^r_S(K,M^d)$, où la dernière égalité vient de 2.4.16(b).

□

Démonstration du théorème de Poitou-Tate. On peut vérifier par définition que l'on a une suite exacte $0 \to E_S \to J_S \to C_S \to 0$, appliquant $Ext^*_{G_S}(M^D,-)$ on obtient une suite exacte de cohomologie. Notant que M est fini d'ordre m, avec l'hypothèse $m\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$, $M^D = M^d$ et $M^{DD} \simeq M$, d'après

[8] Pour $s \geqslant 3$ et v non-archimédienne, il vient du fait que $scd(Gal(K_v^s/F_w)) = 2$ (cf.1.5.4). En effet, ce n'est pas vrai pour v archimédienne, c'est possible que les H^4, $H^6,\ldots$ restent non-zéro, mais ce n'est pas important car prenant $\varinjlim_F$ ils tendent vers 0 : Si $m=[M]\neq 1$ est impaire, on note $n=m$, sinon on note $n=2m$, on prend $F=K(\mu_n)$, on a $K\subseteq F\subseteq K_S$ et $F_w = K_v^s = \mathbb{C}$ où v est une place réelle.

les lemmes 2.4.16, 2.4.19 et le théorème 2.4.6 on a $Ext^r_{G_S}(M^D, E_S) \simeq H^r(G_S, M)$, $Ext^r_{G_S}(M^D, C_S) \simeq H^{2-r}(G_S, M^D)^*$ pour tout r et $Hom_{G_S}(M^D, J_S) \simeq \prod_{v\in S} H^0(G_v, M)$ et $Ext^r_{G_S}(M^D, J_S) \simeq P^r_S(K, M)$ pour tout $r \geqslant 1$. La suite de cohomologie devient

$$0 \longrightarrow H^0(G_S, M) \longrightarrow \textstyle\prod_{v\in S} H^0(G_v, M) \longrightarrow Hom_{G_S}(M^D, C_S) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow H^1(G_S, M) \xrightarrow{\beta^1_S(K,M)} P^1_S(K, M) \xrightarrow{\gamma^1_S(K,M)} H^1(G_S, M^D)^* \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow H^2(G_S, M) \xrightarrow{\beta^2_S(K,M)} P^2_S(K, M) \xrightarrow{\gamma^2_S(K,M)} H^0(G_S, M^D)^* \longrightarrow \cdots$$

et (cf. 2.4.6)

$$\cdots \to H^r(G_S, M) \to P^r_S(K, M) = \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v, M) \to Ext^r_{G_S}(M^D, C_S) = 0$$

pour $r \geqslant 3$.

L'application $\gamma^2_S(K, M)$ est le dual de l'application $\beta^0_S(K, M^D) : H^0(G_S, M^D) \to P^0_S(K, M^D) = \prod_{v\in S} H^0(K_v, M^D)$ qui est injective[9], alors $\gamma^2_S(K, M)$ est surjective. Donc $H^r(G_S, M) \simeq \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v, M)$ pour $r \geqslant 3$.

Les derniers six termes sont exactement ceux dans la suite de Poitou-Tate, on trouve le premier trois termes par dualité. La preuve est complète. □

La démonstration ici suit principalement celle dans [19, MilneADT], quelques points sont expliqués en plus détails. La source est [35, Tate].

2.4.4 Caractéristique d'Euler-Poincaré globale

Les notations sont les mêmes que celles dans la sous-section précédente, K est un corps global, S est un ensemble non vide de places de K qui contient toutes les places archimédiennes, $G_S = Gal(K_S/K)$ où $K_S \subseteq K^s$ est l'extension maximale de K non-ramifiée en dehors S, M est un G_S-module fini discret d'ordre m inversible dehors S. Dans cette sous-section on suppose que S est fini, d'après le corollaire 2.4.12, $H^r(G_S, M)$ est fini pour tout r. On définit

$$\chi(G_S, M) = \frac{[H^0(G_S, M)] \cdot [H^2(G_S, M)]}{[H^1(G_S, M)]}.$$

[9] Si K est un corps de fonctions, S n'est pas vide, c'est claire. Suppose que K est un corps de nombres. Si $S = S_\infty$ on a $[M] = 1$, sinon S contient au moins qu'une place non-archimédienne, c'est aussi claire.

On fait attention que χ n'est pas additive en M parce que $H^r(G_S, M)$ ne peut pas être disparu pour $r \neq 0, 1, 2$.

Théorème 2.4.20. *On a la formule*[10] *(S fini)*

$$\chi(G_S, M) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0(G_v, M)]}{|[M]|_v}.$$

Remarque 2.4.21. (a)Si K est un corps de fonctions, le théorème dit simplement que $\chi(G_S, M) = 1$, dans ce cas, $H^r(G_S, M)$ disparaît pour $r \neq 0, 1, 2$, alors $\chi(G_S, -)$ est additive.

(b)Si K est un corps de nombres, pour $v \in S_\infty$ on sait que $\frac{[H^0(G_v,M)]}{|[M]|_v} = \frac{[H^1(G_v,M)]}{[H^0(G_v,M^D)]}$ (cf.2.2.11), et on sait que $[H^1(G_v, M)] = [H^1(G_v, M^D)] = [H^0_T(G_v, M^D)]$ d'après 2.2.5 et le quotient de Herbrand de la cohomologie de Tate. La formule donc s'écrit

$$\chi(G_S, M) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0_T(G_v, M^D)]}{[H^0(G_v, M^D)]}.$$

(c)Le groupe $P^r_S(K, M)$ est simplement le produit fini de $H^r(K_v, M)$ car S est fini, de la suite exacte de Poitou-Tate on peut calculer $\chi(G_S, M) \cdot \chi(G_S, M^D)$ directement, combinant la formule de la caractéristique d'Euler-Poincaré locale pour $\chi(K_v, M)$ on obtient finalement l'égalité suivante

$$\chi(G_S, M)\chi(G_S, M^D) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0_T(G_v, M)] \cdot [H^0_T(G_v, M^D)]}{[H^0(G_v, M)] \cdot [H^0(G_v, M^D)]}$$

(pour détail cf. [19, MilneADT I.5.2]), on peut aussi l'obtenir par la formule de la caractéristique d'Euler-Poincaré globale.

Démonstration du théorème (une esquisse). La procédure de la démonstration est similaire de celle en cas local parce que beaucoup d'étapes sont du pointe de vue des groupes et leurs représentations. On pose

$$\phi(M) = \chi(G_S, M) / \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0_T(G_v, M^D)]}{[H^0(G_v, M^D)]}$$

et on veut $\phi(M) = 1$.

[10] La cohomologie $H^0(G_v, M)$ est la cohomologie usuelle, ce n'est pas la cohomologie de Tate $H^0(K_v, M) = H^0_T(G_v, M)$. La valuation est celle qui induit la formule de produit, par exemple $|-2|_{\mathbb{R}} = 2$ et $|-2|_{\mathbb{C}} = 4$.

Lemme 2.4.22. *L'application ϕ est additive en M.*

Démonstration. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de G_S-modules discrets, on a la suite exacte de cohomologie $0 \to H^0(G_S, M') \to \cdots \to H^4(G_S, M'') \to H^5(G_S, M')' \to 0$ où $H^5(G_S, M')' = ker(H^5(G_S, M') \to H^5(G_S, M))$. D'après 2.4.8(c), $H^r(G_S, -) = \bigoplus_{v \in S_\infty} H^r(G_v, -) = P_S^r(K, -)$ pour $r \geqslant 3$, alors $[P_S^3(K, M)] = [P_S^4(K, M)]$ par le quotient de Herbrand. La suite exacte ci-dessus implique que $\chi(M')\chi(M'') = \chi(M)[P_S^5(K, M')']$ où $C = P_S^5(K, M') = ker('P_S^5(K, M') \to P_S^5(K, M))$. Comme la cohomologie de Tate est 2-périodique pour un groupe cyclique, on a
$C = \bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} ker(H^1(G_v, M') \to H^1(G_v, M))$. Pour v réelle on a une suite exacte

$$0 \to H^0(G_v, M') \to H^0(G_v, M) \to H^0(G_v, M'') \to$$
$$ker(H^1(G_v, M') \to H^1(G_v, M)) \to 0,$$

on trouve alors $[C] = \prod_{v \in S^{\mathbb{R}}} \frac{[H^0(G_v, M')] \cdot [H^0(G_v, M'')]}{[H^0(G_v, M)]}$. On combine ces formules et trouve $\phi(M')\phi(M'') = \phi(M)$. □

D'après le lemme précédent, on peut supposer que M est de p-torsion avec p inversible dehors S, le dévissage se permet de supposer que M est tué par p, i.e. M est un $\mathbb{F}_p[G_S]$-module. On prend L une extension finie galoisienne de K dans K_S telle que $L \supseteq \mu_p(K^s)$ (si $p = 2$ on demande $L \supseteq \mu_4(K^s)$, c'est possible car p est inversible dehors S) et $Gal(K_S/L)$ agit trivialement sur M et sur M^D, alors L est totalement imaginaire, on pose $\bar{G} = Gal(L/K)$.

Le lemme précédent dit que $\phi : R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to \mathbb{Q}_{>0}$ est un homomorphisme de groupes bien défini. Exactement le même argument que le cas local on peut supposer[11] que $\bar{G}$ est cyclique d'ordre non-divisible par p.

D'après 2.4.8 $H^r(Gal(K_S/L), M) = 0$ pour $r \geqslant 3$ car L est totalement imaginaire, on peut alors définir $\chi' : R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}); [M] \mapsto [H^0(Gal(K_S/L), M)] - [H^1(Gal(K_S/L), M)] + [H^2(Gal(K_S/L), M)]$ un homomorphisme de groupes. Par la même raison que le cas local, on peut définir un homomorphisme de groupes[12] $\theta : R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G}) \to \mathbb{Q}_{>0}; N \mapsto [N^{\bar{G}}]$

[11] Le valeur de $\phi(G_S, M)$ ne changera pas sous l'induction de représentations de groupes : c'est claire pour le numérateur d'après le lemme de Shapiro, pour le dénominateur on applique [30, SerreRepGp II.7.3 Prop.22], pour détail cf. [22, NSW 8.6.14] ou [14, Kazarnovskii page 59] ou [11, Haberland 3.3].

[12] L'application θ est un homomorphisme de groupes, mais ce n'est pas un homomorphisme d'anneaux, alors la dernière étape d'argument de Milne (cf. [19, MilneADT la démonstration du Th. I.5.1 page 70]) ne marche pas, on ne trouve pas l'égalité $\chi(M) = \chi(M^D)$, et l'assertion $[M^{G_v}] = [(M^D)^{G_v}]$ n'est pas vraie, par exemple $M = \mu_3$ avec v réelle $[M^{G_v}] = 1$ mais $[(M^D)^{G_v}] = 3$. Peut-être l'approche de Milne ne marche pas.

car $\bar{G}$ est d'ordre non-divisible par p. On pose $M^* = Hom(M, \mathbb{F}_p)$ c'est un $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module.

L'accouplement $\mu_p \times M^* \to M^D = Hom(M, K^s); (\zeta, f) \mapsto (x \mapsto \zeta^{f(x)})$ se donne l'accouplement cup-produit

$$H^r(Gal(K_S/L), \mu_p) \otimes Hom(M, \mathbb{F}_p) \to H^r(Gal(K_S/L), M^D),$$

qui est un isomorphisme (le même argument que le cas local notant que $\mu_p \otimes M^* \simeq M^D$ et $Hom_{Gal(K_S/L)}(P, M^D) \simeq Hom_{Gal(K_S/L)}(P, \mu_p) \otimes M^*$), d'où $\chi'([\mu_p]) \cdot [M^*] = \chi'([M^D])$, donc $\chi'([\mu_p]) \cdot [(M^D)^*] = \chi'([M])$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$.

On pose[13] $\psi(M) = \sum_{v \in S_\infty} \psi_v(M)$ où $\psi_v(M) = \sum_{w|v}([H^0_T(G_w, M^D)] - [H^0(G_w, M^D)]) \in R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$, on peut vérifier que $\theta \circ \psi(M) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0_T(G_v, M^D)]}{[H^0(G_v, M^D)]}$ (pour l'action de $\bar{G}$ sur $\psi_v(M)$, cf. [14, Kazarnovskii page 60]).

On sait que $H^i(G_w, M^D) \simeq H^i(G_w, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes M^D$ comme $\bar{G}$-module pour tout i (cf. le même argument que le cas local). Donc on a $H^0(G_w, M^D) \simeq H^0(G_w, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes M^D$ et $H^0_T(G_w, M^D) \simeq H^0_T(G_w, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes M^D$ (par 2-périodicité), i.e. $\psi(M) = [M^D] \cdot \psi(\mu_p) \in R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$.

Maintenant $\phi(M) = \theta(\chi'([M]) - \psi(M)) = \theta(\chi'([\mu_p]) \cdot [M^{D*}] - \psi(\mu_p)[M^D])$, si l'on peut montrer[14] que $\chi'([\mu_p]) = \psi(\mu_p) \in R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$, il reste à vérifier que $\theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M^*]) = \theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M])$.

Pour calculer $\chi'([\mu_p])$ on a besoin de calculer $H^i(Gal(K_S/L), \mu_p)$, premièrement on calcule la cohomologie du groupe de S-unités, ensuite on applique la suite de Kummer pour μ_p, finalement on relie $H^i(Gal(K_S/L), \mu_p)$ avec le groupe des S-classes et le groupe des S-unités, $\psi_v(\mu_p)$ peut être facilement lu de la définition, (souvenant que L est totalement imaginaire) on trouve $\chi'([\mu_p]) = \psi(\mu_p)$ avec $\psi_v(\mu_p) = -[\prod_{w|v} \mathbb{F}_p \cdot w] = -[Ind^{\bar{G}}_{\bar{G}_{w|v}} \mathbb{F}_p] \in R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ où $\bar{G}_{w|v} = Gal(L_w/K_v)$ pour une certaine place w choisie au-dessus v. Pour détail cf. [11, Haberland 3.5].

Enfin, on va vérifier l'égalité $\theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M^*]) = \theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M])$. Si v est non-ramifiée dans L, alors $\psi_v(\mu_p) = -[Ind^{\bar{G}}_{\bar{G}_{w|v}} \mathbb{F}_p] = -[Ind^{\bar{G}}_1 \mathbb{F}_p] = -[\mathbb{F}_p[\bar{G}]]$, de la même raison que le cas local on sait que $[M] \cdot [\mathbb{F}_p[\bar{G}]] = dim(M)[\mathbb{F}_p[\bar{G}]]$, on conclut car $dim(M) = dim(M^*)$. Si v est ramifiée dans L, $\theta([m] \cdot \psi(\mu_p)) = -\theta([M \otimes Ind^{\bar{G}}_{\bar{G}_{w|v}} \mathbb{F}_p]) = -\theta([Ind^{\bar{G}}_{\bar{G}_{w|v}} M]) = \frac{1}{[H^0(\bar{G}, Ind^{\bar{G}}_{\bar{G}_{w|v}} M)]} = \frac{1}{[H^0(\bar{G}_{w|v}, M)]} = \frac{1}{[M^{\bar{G}_{w|v}}]}$. On sait $\bar{G}_{w|v} = \{1, \sigma\}$, pour tout $f \in M^* = Hom(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $((1 -$

[13] C'est justement une notation pour une expression trop longue, ψ n'est pas un homomorphisme de $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ vers $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ car ψ n'est pas additive.

[14] C'est un petit peu plus que disant « le théorème est vrai pour μ_p (i.e. $\theta \circ \chi'([\mu_p]) = \theta \circ \psi(\mu_p)$) ».

$\sigma)f)(m) = f(m) -^{\sigma} f(m) = f(m) - \sigma^{-1}(f(\sigma m)) = f(m) - f(\sigma m) = f((1-\sigma)m)$, c'est-à-dire que le dual de l'application $M \xrightarrow{1-\sigma} M$ est $M^* \xrightarrow{1-\sigma} M^*$, alors $[M^{\bar{G}_{w|v}}] = [ker(M \xrightarrow{1-\sigma} M)] = [coker(M \xrightarrow{1-\sigma} M)] = [ker(M^* \xrightarrow{1-\sigma} M^*)] = [M^{*\bar{G}_{w|v}}]$, où la seconde égalité vient du fait que M est fini et la troisième vient de la dualité $M \mapsto M^*$. Alors $\theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M^*]) = \theta(\psi_v(\mu_p) \cdot [M])$. La démonstration est complète[15]. □

Remarque 2.4.23. Le détail de démonstration de l'égalité $\chi'([\mu_p]) = \psi(\mu_p)$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ est omis ici, pour cette étape la preuve du livre [11, Haberland 3.5] est presque claire pour les corps de nombres sauf qu'un petit problème mentionné dans la note de bas de page, ça marche aussi pour un corps de fonctions prenant $S_\infty = \emptyset$.

Dans [11, Haberland 3.5], « Because of the finiteness of the class number, we have $[_pCl_S(K)] = [Cl_S(K)_p]$ in $K(G)$ », c'est vrai mais ce n'est pas triviale ! (Avec notre notations) On a une suite exacte de $\mathbb{Z}[\bar{G}]$-modules $0 \to Cl_S(L)_p \to Cl_S(L) \xrightarrow{p} Cl_S(L) \to Cl_S(L)^{(p)} \to 0$, on trouve $[Cl_S(L)_p] = [Cl_S(L)^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{Z}}(\bar{G})$, mais on ne peut pas dire facilement que $[Cl_S(L)_p] = [Cl_S(L)^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ même si $Cl_S(L)_p$ et $Cl_S(L)^{(p)}$ sont $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-modules, parce que $Cl_S(L)$ n'est pas un $\mathbb{F}_p[\bar{G}]$-module en général. Et il n'y a pas d'homomorphisme[16] évident de $R_{\mathbb{Z}}(\bar{G})$ vers $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$. En effet, l'égalité $[Cl_S(L)_p] = [Cl_S(L)^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$ est un cas particulier du lemme 2.4.24 suivant.

Lemme 2.4.24. *Soit G un groupe fini, et soit $M \to N$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}[G]$-modules de type fini avec noyau fini et co-noyau fini. Alors $[M_p] - [M^{(p)}] = [N_p] - [N^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G)$.*

En particulier, si N est un $\mathbb{Z}[G]$-module fini, alors $[N_p] = [N^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G)$.

Démonstration. D'abord, on suppose que $M \to N$ est injective, alors $M \otimes \mathbb{Z}_p \to N \otimes \mathbb{Z}_p$ est un homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}_p[G]$-modules de type fini avec noyau fini et co-noyau fini (cf. [2, Atiyah 10.12 & 10.13]). D'après le

[15] Dans [14, Kazarnovskii page 60], pour compléter la démonstration, on veut fabriquer un isomorphisme entre $M' = Hom(M, \mu_p)$ et $M \otimes \mu_p$, mais il y a une erreur : l'application $\zeta : M' \to M \otimes \mu_p; f \mapsto \sum_{m \in M} m \otimes f(m)$ est G-équivariante mais ce n'est pas un isomorphisme. Par exemple, on prend $p = 5$ et $M = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors $f \mapsto \sum_{m\in M} m \otimes f(m) = 0 \otimes f(0) + 1 \otimes f(1) + \cdots + 4 \otimes f(4) = (0^2 + 1^2 + \cdots + 4^2) \otimes f(1) = 30 \otimes f(1) = 0$ pour tout f.

[16] Dans [11, Haberland page 35], la démonstration du lemme 9 n'est pas claire, parce que l'application $\phi_* : K(\mathbb{Z}G) \to K(\mathbb{F}_pG); [A] \mapsto [\mathbb{F}_p \otimes A]$ n'est pas bien définie sur le groupe de Grothendieck : Si $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ est une suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$-module, il est souvent que la suite $0 \to \mathbb{F}_p \otimes A_1 \to \mathbb{F}_p \otimes A_2 \to \mathbb{F}_p \otimes A_3 \to 0$ ne reste pas exacte. Il faut meilleur de remplacer la démonstration par celle du lemme 2.4.24.

lemme 2.2.10, on obtient $[M_p] - [M^{(p)}] = [N_p] - [N^{(p)}]$ dans $R_{\mathbb{F}_p}(G)$. En particulier, si N est fini, on prend $M = 0$ et trouve $[N_p] = [N^{(p)}] \in R_{\mathbb{F}_p}(G)$.

En général, on brise la suite exacte longue $0 \to Ker \to M \to N \to Coker \to 0$ en les suites exactes courtes $0 \to Ker \to M \to Q \to 0$ et $0 \to Q \to N \to Coker \to 0$, le lemme du serpent se donne une suite exacte de $\mathbb{F}_p[G]$-modules $0 \to Ker_p \to M_p \to Q_p \to Ker^{(p)} \to M^{(p)} \to Q^{(p)} \to$. Comme Ker est fini, $[Ker_p] = [Ker^{(p)}] \in R_{\mathbb{F}_p}(G)$, alors on a $[M_p] - [M^{(p)}] = [Q_p] - [Q^{(p)}] \in R_{\mathbb{F}_p}(G)$. De même, le lemme du serpent se donne $[N_p] - [N^{(p)}] = [Q_p] - [Q^{(p)}]$ qui complète la preuve. $\square$

Pour un corps de nombres, $Cl_S(L)$ est fini car S est fini, pour un corps de fonctions, $Cl_S(L)$ est le groupe de Picard d'un courbe affine car $S \neq \emptyset$, c'est aussi fini (cf. 2.4.10), d'après le lemme précédent, on trouve $[Cl_S(L)_p] = [Cl_S(L)^{(p)}] \in R_{\mathbb{F}_p}(\bar{G})$.

Chapitre 3

Cohomologie Étale

Nous discutons les théorèmes de dualité en cohomologie étale.

Premièrement, nous traduisons le théorème de dualité locale (énoncé en termes de cohomologie galoisienne) en termes de cohomologie étale (Théorème 3.1.9).

Ensuite, nous définissons la cohomologie à support compact (en un certain sens), et nous développons ses propriétés. Nous faisons quelques calculs préliminaires de la cohomologie de $\mathbb{G}_m$. Nous étudions aussi la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré 3.2.17 en identifiant les groupes de cohomologie étale avec ceux de cohomologie galoisienne.

Finalement, nous montrons en détails le théorème de dualité d'Artin-Verdier 3.3.1. Nous nous ramenons au cas simple, et nous le vérifions par récurrence avec l'hypothèse $car(K) \nmid [\mathcal{F}_{\bar{\eta}}]$; afin de conclure nous utilisons un argument supplémentaire d'Artin-Schreier pour le cas d'un corps de fonctions. Une preuve complète est donnée.

Les deux dernières sections du chapitre 1 sont des préliminaires, qui contiennent le début de la théorie sur le site $X_{\text{ét}}$, quelques suite exactes fondamentales pour les faisceaux et quelques propriétés utiles (particulièrement des suites spectrales connues sur la cohomologie étale etc.).

3.1 Dualité locale

On va traduire de la dualité en cohomologie galoisienne à la dualité en cohomologie étale. En effet, la dualité en cohomologie étale contient deux parties, une vient de la dualité sur un corps local, l'autre vient de la dualité sur un corps fini.

Soit $X = Spec(R)$ où R est un anneau de valuation discrète hensélien de corps de fractions K et de corps résiduel k. Par exemple, R peut être un anneau de valuation discrète complet ou la hensélisation d'un anneau local en une place non-archimédienne d'un corps global.

On a les notations standards :

$$\begin{tikzcd}
 & & K^s . \arrow[d, dash] \\
k^s \arrow[d, dash] & R^{nr} \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] \arrow[d, dash] & K^{nr} \arrow[d, dash] \\
k & R \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & K
\end{tikzcd}$$

On note $i : x = Spec(k) \to X$ l'immersion fermée associée au point fermé et $j : u = Spec(K) \to X$ l'immersion ouverte associée au point générique. Le groupe de Galois $g = Gal(k^s/k) \simeq G/I$ où $I = Gal(K^s/K^{nr}) \lhd G = Gal(K^s/K)$.

Proposition 3.1.1. *(a)Pour $\mathcal{F} \in Fais(u)$ et tout $r \geqslant 0$ on a $H^r(X, j_!\mathcal{F}) = 0$ et un isomorphisme $H^r(u, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H_x^{r+1}(X, j_!\mathcal{F})$.*

(b)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ et tout $r \geqslant 0$ on a un isomorphisme $H^r(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^r(x, i^*\mathcal{F})$.

Démonstration. (a)D'après 1.10.7(f) on a une suite exacte

$$\cdots \to H_x^r(X, j_!\mathcal{F}) \to H^r(X, j_!\mathcal{F}) \to H^r(u, j_!\mathcal{F}|u) \to \cdots ,$$

alors il suffit de montrer $H^r(X, j_!\mathcal{F}) = 0$. On a un G-module discret $M = \mathcal{F}_{\bar{u}}$, on sait que M^I est le g-module discret associé à $i^*j_*\mathcal{F}$ (cf. 1.9.9(2)). On a $Hom_g(N, M^I) = Hom_G(N, M)$ pour tout g-module N, alors i^*j_* : G-modules $\to$ g-modules a un foncteur adjoint à gauche : $N \mapsto N$ qui est exact, alors il préserve objets injectifs. D'après 1.9.8(5) on a une suite exacte $0 \to j_!\mathcal{F} = j_!j^*j_*\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F} \to i_*i^*j_*\mathcal{F} \to 0$, or on sait que i_* et j_* préservent objets injectifs, alors lorsque $\mathcal{F}$ est injectif la suite ci-dessus se donne une résolution injective de $j_!\mathcal{F}$. On sait que $M^G = \Gamma(u, \mathcal{F}) = \Gamma(X, j_*\mathcal{F}) \to (M^I)^g = \Gamma(x, i^*j_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, i_*i^*j_*\mathcal{F})$ est un isomorphisme, par la résolution injective on a $H^r(X, j_!\mathcal{F}) = 0$ pour $r \geqslant 1$ lorsque $\mathcal{F}$ est injectif et on a toujours $H^0(X, j_!\mathcal{F}) = 0$ pour $\mathcal{F} \in Fais(u)$.

Maintenant, pour $\mathcal{F} \in Fais(u)$ on prend $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective, alors $j_!\mathcal{F} \to j_!\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution acyclique, alors $H^r(X, j_!\mathcal{F}) = H^r(\Gamma(X, j_!\mathcal{I}^\bullet))$. Or on a vu que $\Gamma(X, j_!(-))$ est le foncteur 0, alors $H^r(X, j_!\mathcal{F}) = 0$ pour tout r.

(b)On prend la suite de cohomologie de la suite $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$, appliquant (a), on trouve $H^r(X, \mathcal{F}) \simeq H^r(X, i_*i^*\mathcal{F}) = H^r_x(X, i_*i^*\mathcal{F}) = H^r(x, i^*\mathcal{F})$ (cf.1.10.7(d) notant $supp(i_*i^*\mathcal{F}) \subseteq x$). □

Corollaire 3.1.2. *Pour tout r on a $H^r(X, \mathbb{Z}) = H^r(g, \mathbb{Z})$, en particulier, lorsque k est fini on a*

$$\begin{array}{ccccccc} H^r(X, \mathbb{Z}) & = & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & 0 \\ r & = & 0 & 1 & 2 & \geqslant 3. \end{array}$$

Démonstration. Il vient directement de la proposition ci-dessus et de la remarque 1.9.6. □

Lemme 3.1.3. *Si k est algébriquement clos, alors $H^r(K, \mathbb{G}_m) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$.*

Démonstration. L'extension $\widehat{K}/K$ est séparable car R est excellent (cf. [15, Liu 8.2.34, 8.2.35 & 8.2.39]). Alors K est algébriquement clos dans $\widehat{K}$ (cf. [19, MilneADT I.A.6] ça marche aussi pour k algébriquement clos), donc K est un corps vérifiant C_1 d'après le théorème de Lang (cf. [32, Shatz th.27] ou [31, SerreCohGal II.3.3]), on a donc $H^r(K, \mathbb{G}_m) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$ (cf. [31, SerreCohGal II.3]). □

Lemme 3.1.4. *Soit k un corps parfait.*

(a)Alors $R^r j_*\mathbb{G}_m = 0$ pour tout $r \geqslant 1$, ainsi $Ext^r_X(\mathcal{F}, j_*\mathbb{G}_m) \simeq Ext^r_u(\mathcal{F}|u, \mathbb{G}_m)$ pour tout r et tout $\mathcal{F} \in Fais(X)$.

(b)Pour $\mathcal{F} \in Fais(x)$ on a un isomorphisme $Ext^{r-1}_x(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ pour tout $r \geqslant 1$.

Démonstration. (a)D'après [18, MilneEC III.1.15] (prenant $X = Spec(R)$, $Y = u$) on trouve pour $r \geqslant 1$, $(R^r j_*\mathbb{G}_m)_{\bar{x}} \simeq H^r(K^{nr}, \mathbb{G}_m) = 0$ et $(R^r j_*\mathbb{G}_m)_{\bar{u}} \simeq H^r(K^s, \mathbb{G}_m) = 0$, où le première égalité vient de 3.1.3. Alors $R^r j_*\mathbb{G}_m = 0$ pour tout $r \geqslant 1$, l'assertion vient de la suite spectrale 1.10.7(b).

(b)D'après 1.9.3(2), on a une suite exacte $0 \to \mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m \xrightarrow{ord} i_*\mathbb{Z} \to 0$ qui induit une suite exacte $\cdots \to Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, j_*\mathbb{G}_m) \to Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, i_*\mathbb{Z}) \to \cdots$. On sait que $Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, j_*\mathbb{G}_m) \simeq Ext^r_u(i_*\mathcal{F}|u, \mathbb{G}_m)$ et $Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, i_*\mathbb{Z}) \simeq Ext^r_x(\mathcal{F}, \mathbb{Z})$ (cf. (a) et 1.10.7(c)), et que $i_*\mathcal{F}|u$ est toujours nul, alors l'assertion en suit. □

Lemme 3.1.5. *Si k est fini, alors $H^r(K, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 3$.*

Démonstration. Le corps K^{nr} a corps résiduel k^s qui est algébriquement clos, alors $H^r(K^{nr}, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 1$ d'après 3.1.3. On a donc une suite exacte pour $r \geqslant 1$, $0 \to H^r(Gal(K^{nr}/K), K^{nr*}) \to H^r(K, \mathbb{G}_m) \to H^r(K^{nr}, \mathbb{G}_m)$ (cf. [28, SerreCorpsLoc VII.6]). Or $Gal(K^{nr}/K) \simeq Gal(k^s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ et $scd(\widehat{\mathbb{Z}}) = 2$ (cf. 1.5.4), alors $H^r(K, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 3$. □

Proposition 3.1.6. *Suppose que k est fini, alors (a)$H^r(X, \mathbb{G}_m) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$;*

(b)on a

$$\begin{array}{lcccccc} H^r_x(X, \mathbb{G}_m) & = & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & 0 \\ r & = & 0 & 1 & 2 & 3 & \geqslant 4. \end{array}$$

Démonstration. (a)Prenant $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ le lemme 3.1.4(a) implique que $H^r(X, j_*\mathbb{G}_m) \simeq H^r(K, \mathbb{G}_m)$ pour tout r. On sait que $H^r(K, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \neq 0, 2$ d'après le lemme 3.1.5 et Hilbert 90, et que $H^2(K, \mathbb{G}_m) \overset{ord}{\to} H^2(k, \mathbb{Z}) = Hom_{cts}(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un isomorphisme (cf. [19, MilneADT I.A.1 & A.2]). D'après 1.10.7(c) on a $H^r(X, i_*\mathbb{Z}) \simeq H^r(x, \mathbb{Z})$ pour r, et si $r \geqslant 3$ il disparaît d'après 1.5.4.

De la suite de cohomologie associée à $0 \to \mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m \overset{ord}{\to} i_*\mathbb{Z} \to 0$ (cf. 1.9.3) on trouve que $H^r(X, \mathbb{G}_m) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$.

(b)D'après 1.10.7(f) on a une suite exacte

$$0 \to H^0_x(X, \mathbb{G}_m) \to R^\times \to K^* \to H^1_x(X, \mathbb{G}_m) \to H^1(X, \mathbb{G}_m) \overset{(a)}{=} 0$$

et $H^r(K, \mathbb{G}_m) \simeq H^{r+1}_x(x, \mathbb{G}_m)$ pour tout $r \geqslant 1$, on trouve l'assertion que l'on veut. □

Corollaire 3.1.7. *Suppose que k est fini, si $car(k) \nmid n$, alors*

$$H^r_x(X, \mu_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & r = 2, 3; \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Comme $car(k) \nmid n$, $0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$ est une suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ (cf.1.9.3(1)). Prenant la suite de cohomologie de $H^r_x(X, -)$ on trouve l'assertion d'après 3.1.6(b). □

Remarque 3.1.8. On peut calculer les $H^r_x(X, \mathbb{G}_m)$ de l'autre façon pour k parfait. D'après 3.1.4(a) on a un isomorphisme $H^r(X, j_*\mathbb{G}_m) \simeq H^r(u, \mathbb{G}_m)$ pour tout r, 1.10.7(f) implique que $H^r_x(X, j_*\mathbb{G}_m) = 0$ pour tout r. La suite de cohomologie de $H^r_x(X, -)$ appliqué à $0 \to \mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m \overset{ord}{\to} i_*\mathbb{Z} \to 0$ se donne $H^{r+1}_x(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^r_x(X, i_*\mathbb{Z}) \simeq H^r(x, \mathbb{Z}) = H^r(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ d'après 1.10.7(d), on trouve tout de suite les valeurs de $H^r_x(X, \mathbb{G}_m)$.

Suppose que k est fini. D'après la démonstration de la proposition 3.1.6 et la remarque 3.1.8, on a deux façons différentes d'identifier $H^3_x(x, \mathbb{G}_m)$ avec $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, or par définition, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^3_x(X,\mathbb{G}_m) \arrow[dd, equal] & & H^2(u,\mathbb{G}_m) \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[r, "inv_K"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[dd, equal] \\
& & H^2(Gal(K^{nr}/K), K^{nr*}) \arrow[d, "ord"] & \\
H^3_x(X,\mathbb{G}_m) & H^2_x(X, i_*\mathbb{Z}) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, equal] & H^2(x,\mathbb{Z}) \arrow[r, "inv"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

alors on peut utiliser les deux façons à la fois.

D'après 1.10.7, on a $H^r_x(X, \mathcal{F}) \simeq Ext^r_X(i_*\mathbb{Z}, \mathcal{F})$, alors l'accouplement $Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \times Ext^{3-r}_X(i_*\mathbb{Z}, \mathcal{F}) \to Ext^3_X(i_*\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ s'identifie à un accouplement

$$Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_x(X, \mathcal{F}) \to H^3_x(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui induit l'application

$$\alpha^r(X, \mathcal{F}) : Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to H^{3-r}_x(X, \mathcal{F})^*.$$

Théorème 3.1.9. [1] *Suppose que k est fini. Soit $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible, suppose que K est complet ou que $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ lorsque $car(K) = p \neq 0$. Alors l'accouplement*

$$Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_x(X, \mathcal{F}) \to H^3_x(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est parfait. Si $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ lorsque $car(K) = p \neq 0$, tous les groupes sont finis.

Démonstration du théorème. D'abord, on considère les faisceaux de la forme $i_*\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} \in Fais(x)$ constructible. D'après 3.1.4(b) et 1.10.7(d) on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
Ext^r_X(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \times & H^{3-r}_x(X, i_*\mathcal{F}) \arrow[r] & H^3_x(X, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,. \\
Ext^{r-1}_x(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \arrow[u, "\simeq"'] & \times & H^{3-r}(x, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & H^2(x, \mathbb{Z}) \arrow[r, "inv"] \arrow[u, "\simeq"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Or la catégorie de faisceaux sur $Spec(k)$ est équivalente à la catégorie de g-modules discrets (cf. 1.9.6), où les faisceaux constructibles sont associés

[1] Dans [19, MilneADT II.1.8(a)] page 155, il y a pas de raison évidente que la première ligne du diagramme était exacte après complété pour le cas K est hensélien mais non-complet (cf. 1.1.3 et 1.1.5).

aux g-modules finis, alors la deuxième ligne du diagramme s'identifie à l'accouplement dans 2.1.4 qui est parfait entre deux groupes finis.

Ensuite on considère les faisceaux de la forme $j_!\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} \in Faix(u)$ constructible sous l'hypothèse soit K est complet soit $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ lorsque $car(K) = p \neq 0$. D'après 1.10.7(a), 3.1.1(a) et la démonstration 3.1.6 on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} Ext^r_X(j_!\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \times & H^{3-r}_x(X, j_!\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^3_x(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ . \\ \downarrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \| \\ Ext^r_u(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \times & H^{2-r}(u, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(u, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

On sait que la catégorie de faisceaux sur $u = Spec(K)$ est équivalente à la catégorie de G-modules discrets (cf. 1.9.6), où les faisceaux constructibles sont associés aux G-modules finis, alors la deuxième ligne du diagramme s'identifie à l'accouplement dans 2.2.1 ou 2.2.4 (avec $M = \mathcal{F}_{\bar{u}}$) qui est parfait sous l'hypothèse, et les groupes sont finis si $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ lorsque $car(K) = p \neq 0$.

Enfin, on considère $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible arbitraire, d'après 1.9.8 on a une suite exacte $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$ (tous les faisceaux apparus sont constructible d'après 1.9.12). Alors on a un diagramme suivant avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & \longrightarrow & Ext^r_X(i_*i^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\simeq} & Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^r_X(j_!j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \cdot & \longrightarrow & H^{3-r}_x(X, i_*i^*\mathcal{F})^* & \longrightarrow & H^{3-r}_x(X, \mathcal{F})^* & \longrightarrow & H^{3-r}_x(X, j_!j^*\mathcal{F})^* & \longrightarrow & \cdot, \end{array}$$

l'assertion du théorème suit immédiatement du 5-lemme et des deux cas particuliers ci-dessus. □

Corollaire 3.1.10. [2] *Suppose que k est fini de caractéristique p, pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ localement constant constructible tel que $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ on pose $\mathcal{F}^D = \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$, alors l'accouplement*

$$H^r(X, \mathcal{F}^D) \times H^{3-r}_x(X, \mathcal{F}) \to H^3_x(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est parfait entre les groupes finis.

[2] Est-ce que l'assertion [19, MilneADT II.1.10(b)] est vraie ? Je ne comprends pas la dernière étape de la démonstration, comment on peut faire dévissage et se ramener aux cas $M = M^I$ et $M = 0$? Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de G-modules, et soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ la suite exacte de faisceaux sur u associée, la suite $0 \to j_*\mathcal{F}' \to j_*\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F}'' \to 0$ n'est plus exacte, on ne peut pas déduire la suite longue de $\mathcal{E}xt^r_X$.

Démonstration. On va identifier les groupe $H^r(X, \mathcal{F}^D)$ et $Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$. Il y a une suite spectrale $H^r(X, \mathcal{E}xt^s_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow Ext^{r+s}_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ d'après 1.10.4. D'après 1.9.10 on a $\mathcal{E}xt^s_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)_{\bar{x}} = Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{x}}, R^{nr\times})$ et $\mathcal{E}xt^s_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)_{\bar{u}} = Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{u}}, K^{s*})$. La condition $p\mathcal{F} = \mathcal{F}$ implique que $p \nmid [\mathcal{F}_{\bar{u}}]$ et $p \nmid [\mathcal{F}_{\bar{x}}]$, alors K^{s*} est $[\mathcal{F}_{\bar{u}}]$-divisible et $R^{nr\times}$ est $[\mathcal{F}_{\bar{x}}]$-divisible d'après le lemme de Hensel. Donc $\mathcal{E}xt^s_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $s \geqslant 1$ (cf. 1.2.6) et $H^r(X, \mathcal{F}^D) = H^r(X, \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)) \simeq Ext^r_X(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$. □

3.2 Cohomologie globale

On introduit les notations suivantes dans cette section entière.

Soit K un corps global. Si K est un corps de nombres, on note X le spectre de l'anneau d'entiers de K. Si K est un corps de fonctions, on note X l'unique courbe connexe complète lisse sur k (le corps de constants de K) de corps de fonctions K, dans ce cas k est algébrique clos dans K.

On note $g : \eta = Spec(K) \to X$ pour le point générique de X. Soient $j : U \to X$ une immersion ouverte et $i : X \setminus U \to X$ une immersion fermée. On pose $U^0 = U \setminus \{\eta\} = \{\text{point fermé de } U\} = \{\text{point fermé de } X \text{ dans } U\}$. Pour $v \in X^0$, $k(v)$ est le corps résiduel de groupe de Galois $g_v = Gal(k(v)^s/k(v))$, $\mathcal{O}_v$ est l'anneau local en v, on pose $K_v = Frac(\mathcal{O}_v^h)$ le corps de fractions de l'hensélisation de $\mathcal{O}_v$ et $\widehat{K}_v$ le corps local complet associé. On note $i_v : Spec(k(v)) \to X$ l'immersion fermée associée à un point fermé v. Pour $v \in S_\infty$ une place archimédienne de K, on pose $K_v = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note toujours $G_v = Gal(K_v^s/K_v)$. Pour v une place non-archimédienne, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Spec(K_v) \arrow[r] \arrow[d] & Spec(K) \arrow[d] \\ Spec(\mathcal{O}_v^h) \arrow[r] & X \end{tikzcd},$$

pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ on note $\mathcal{F}_v$ l'image inverse de $\mathcal{F}$ à $Spec(K_v)$. Pour une place v de K et $\mathcal{F} \in Fais(Spce(K_v))$ on pose $H^r(K_v, \mathcal{F}) = H^r_T(G_v, M)$ où M est le G_v-module discret associé à $\mathcal{F}$ (cf. 1.9.6), c'est-à-dire que $H^r(K_v, \mathcal{F}) = 0$ pour $v = \mathbb{C}$; $H^r(K_v, \mathcal{F}) \simeq H^0_T(G_v, M)$ ou $H^1_T(G_v, M)$ pour $v \in S^{\mathbb{R}}$ si r est un entier pair ou impair.

3.2.1 Cohomologie de $\mathbb{G}_m$

Proposition 3.2.1. *On pose* $S = (X \setminus U) \bigsqcup S_\infty$. *Alors* $H^0(U, \mathbb{G}_m) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times$, $H^1(U, \mathbb{G}_m) = Pic(U) = Cl_S(K)$, *la suite*

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in S} Br(K_v) \stackrel{\sum inv_v}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to 0$$

est exacte et $H^r(U, \mathbb{G}_m) = \bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v, \mathbb{G}_m)$ *pour* $r \geqslant 4$.

Démonstration. D'après 1.9.3(2) on a une suite exacte $0 \to \mathbb{G}_m \to g_*\mathbb{G}_{m,\eta} \to Div_U = \bigoplus_{v \in U^0} i_{v*}\mathbb{Z} \to 0$. D'après [18, MilneEC III.1.15], on sait que

$$(R^s g_* \mathbb{G}_m)_{\bar{t}} = \begin{cases} H^s(K^s, \mathbb{G}_m), & t = \eta \\ H^s(K_v^{nr}, \mathbb{G}_m), & t = v \in U^0 \end{cases}$$

qui est 0 pour $s \geqslant 1$ d'après le lemme 3.1.3. Alors la suite spectrale de Leray 1.10.5 se donne un isomorphisme $H^r(U, g_*\mathbb{G}_{m,\eta}) \simeq H^r(K, \mathbb{G}_{m,K})$ pour tout $r \geqslant 0$.

Comme $i_{v*}\mathbb{Z}$ a support dans $\{v\}$, on a $H^r(U, Div_U) = \bigoplus_{v \in U^0} H^r(U, i_{v*}\mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in U^0} H^r(k(v), \mathbb{Z})$ d'après 1.10.7(d). Notant que $Br(K_v) \simeq Br(\widehat{K}_v) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (cf. [19, MilneADT I.A.2]) et $k(v)$ est le corps résiduel de K_v, on a

$$\begin{array}{ccccccc} H^r(k(v), \mathbb{Z}) & = & \mathbb{Z} & 0 & Br(K_v) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & 0 \\ r & = & 0 & 1 & 2 & \geqslant 3. \end{array}$$

La suite de cohomologie de la suite de diviseur se donne deux suites exactes

$$0 \to H^0(U, \mathbb{G}_m) \to K^* \to \bigoplus_{v \in U^0} \mathbb{Z} \to H^1(U, \mathbb{G}_m) \to H^1(K, \mathbb{G}_m) = 0,$$

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to Br(K) \to \bigoplus_{v \in U^0} Br(K_v) \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to H^3(K, \mathbb{G}_m) \to 0$$

et les isomorphismes $H^r(U, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^r(K, \mathbb{G}_m)$ pour $r \geqslant 4$. On obtient donc les valeurs de $H^0(U, \mathbb{G}_m)$ et $H^1(U, \mathbb{G}_m)$.

Notant que $Br(K_v) \simeq Br(\widehat{K}_v)$, il y a une suite exacte $0 \to Br(K) \to \bigoplus_{v \in X^0 \bigsqcup S_\infty} Br(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ (cf. [36, TateGCFT] et [19, MilneADT I.A] pour les corps de fonctions). Alors le lemme « ker-coker »[3] appliqué à $Br(K) \to \bigoplus_{v \in X^0 \bigsqcup S_\infty} Br(K_v) \twoheadrightarrow \bigoplus_{v \in U^0} Br(K_v)$ se donne une suite exacte

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in S} Br(K_v) \stackrel{\sum inv_v}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to H^3(K, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

[3] On peut vérifier facilement que pour $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, la suite $0 \to ker(f) \to ker(g \circ f) \to ker(g) \to coker(f) \to coker(g \circ f) \to coker(g) \to 0$ est exacte.

On veut $H^r(K,\mathbb{G}_m) \simeq \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,\mathbb{G}_m)$ pour $r \geqslant 3$, et toutes les assertions restées en suivent. En effet, le théorème 2.4.8(c) se donne le fait que $H^r(Gal(K^s/K, M^D)) \simeq \prod_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v, M^D)$ pour $r \geqslant 3$ et M fini, la démonstration marche aussi pour $M=\mathbb{Z}$ (dans ce cas, S contient toutes les places et M n'est pas de torsion, cf. [19, MilneADT I.4.21]), c'est exactement que l'on veut. $\square$

Remarque 3.2.2. Il y a deux cas particuliers suivants.

(a)Si S contient au mois une place non-archimédienne, alors $\sum inv_v : \bigoplus_{v\in S} Br(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est surjective, on a donc une suite exacte

$$0 \to H^2(U,\mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v\in S} Br(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

$H^r(U,\mathbb{G}_m) = \begin{cases} \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^0(K_v,\mathbb{G}_m), & r\geqslant 4 \text{ est un entier pair,} \\ 0, & r \geqslant 3 \text{ est un entier impair,}\end{cases}$ si K est un corps de nombres, et $H^r(U,\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 3$ si K est un corps de fonctions.

(b)Si K est un corps de nombres totalement imaginaire, alors $H^2(X,\mathbb{G}_m) = 0$, $H^3(X,\mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $H^r(X,\mathbb{G}_m)$ pour $r \geqslant 4$.

3.2.2 Cohomologie à support compact

D'abord on va définir la *cohomologie à support compact.* Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ on note $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{F})$ le complexe de Čech standard de $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{F})(V) = C^\bullet(V,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{V}} C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$, c'est un préfaisceau sur $U_{\text{ét}}$. Dans notre cas, $H^r(C^\bullet(U,\mathcal{F})) = H^r(U,\mathcal{F})$ (cf. [19, MilneADT II.0.8]). Pour chaque $v \in X^0 \coprod S_\infty$ on a une application $f_v : Spec(K_v) \to Spec(K) = \eta \to U$, on note $\mathcal{F}_v = f_v^*\mathcal{F}$ pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$. D'après [18, MilneEC III.2.6], prenant la limite on sait que $C^\bullet(K_v,\mathcal{F}_v)$ s'identifie avec la résolution non homogène standard $C^\bullet(M_v)$ de G_v-module discret M_v associé à $\mathcal{F}_v$. Pour v archimédienne on pose $S^\bullet(M_v) = S^\bullet(K_v,\mathcal{F}_v)$ la résolution standard complète (indexée par $\mathbb{Z}$) de M_v; pour v non-archimédienne on pose $S^\bullet(M_v) = S^\bullet(K_v,\mathcal{F}_v) = C^\bullet(M_v)$. En tout cas, on a une application $C^\bullet(M_v) \to S^\bullet(M_v)$, composant avec $C^\bullet(U,\mathcal{F}) \to C^\bullet(M_v)$ on trouve un morphisme de complexes $u : C^\bullet(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\notin U} S^\bullet(M_v)$.[4] On pose $C^\bullet(u)$ le cône de u, $H_c(U,\mathcal{F}) = C^\bullet(u)[-1]$ et $H_c^r(U,\mathcal{F}) = H^r(H_c(U,\mathcal{F}))$ les *groupes de cohomologie à support compact.*

Proposition 3.2.3. *(a)Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$, il existe une suite exacte*

$$\cdots \to H_c^r(U,\mathcal{F}) \to H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\notin U} H^r(K_v,\mathcal{F}_v) \to H_c^{r+1}(U,\mathcal{F}) \to \cdots.$$

[4] On écrit $v \notin U$ pour $v \in (X\setminus U)\coprod S_\infty$

(b)Pour $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux sur* $U_{\acute{e}t}$*, il existe une suite exacte*

$$\cdots \to H_c^r(U,\mathcal{F}') \to H_c^r(U,\mathcal{F}) \to H_c^r(U,\mathcal{F}'') \to H_c^{r+1}(U,\mathcal{F}') \to \cdots.$$

(c)Soit $i : Z \to U$ *une immersion fermée telle que* $\eta \notin Z$*, pour* $\mathcal{F} \in Fais(Z)$ *on a* $H_c^r(U, i_*\mathcal{F}) \simeq H^r(Z,\mathcal{F})$*.*

(d)Soit $j : V \to U$ *une immersion ouverte, pour* $\mathcal{F} \in Fais(V)$ *on a* $H_c^r(U, j_!\mathcal{F}) \simeq H_c^r(V,\mathcal{F})$*. Alors pour* $\mathcal{F} \in Fais(U)$ *on a une suite exacte*

$$\cdots \to H_c^r(V,\mathcal{F}|V) \to H_c^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^r(v, i_v^*\mathcal{F}) \to H_c^{r+1}(V,\mathcal{F}|V)\cdots.$$

(e)Soit $\pi : U' \to U$ *un morphisme fini, alors pour* $\mathcal{F} \in Fais(U')$ *on a un isomorphisme* $H_c^r(U,\pi_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H_c^r(U',\mathcal{F})$*.*

Démonstration. (a)Par définition on a un triangle distingué $C^\bullet(u)[-1] \to C^\bullet(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{u} \bigoplus_{v\notin U} S^\bullet(M_v) \to C^\bullet(u)$, alors une suite exacte

$$\cdots \to H_c^r(U,\mathcal{F}) \to H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\notin U} H^r(K_v,\mathcal{F}_v) \to H_c^{r+1}(U,\mathcal{F}) \to \cdots.$$

(b)On a un diagramme commutatif avec lignes exactes (comme $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est exacte, $0 \to \mathcal{F}'_v \to \mathcal{F}_v \to \mathcal{F}''_v \to 0$ l'est car f_v^* est un foncteur exact, notant que U et $Spec(K_v)$ sont toujours quasi-projectifs, cf. les démonstrations de [18, MilneEC III.2.5 & 2.17])

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^\bullet(U,\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & C^\bullet(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & C^\bullet(U,\mathcal{F}'') \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin U} S^\bullet(K_v,\mathcal{F}'_v) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin U} S^\bullet(K_v,\mathcal{F}_v) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin U} S^\bullet(K_v,\mathcal{F}''_v) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

d'après la théorie d'algèbre homologique on trouve automatiquement $H_c(U,\mathcal{F}'')[-1] \to H_c(U,\mathcal{F}') \to H_c(U,\mathcal{F}) \to H_c(U,\mathcal{F}'')$ un triangle distingué, alors la suite exacte

$$\cdots \to H_c^r(U,\mathcal{F}') \to H_c^r(U,\mathcal{F}) \to H_c^r(U,\mathcal{F}'') \to H_c^{r+1}(U,\mathcal{F}') \to \cdots.$$

(c)Comme $\eta \notin Z$, $(i_*\mathcal{F})_{\bar\eta} = 0$. Alors $(i_*\mathcal{F})_v = 0 \in Fais(Spec(K_v))$ pour tout $v \in X^0 \bigsqcup S_\infty$, $H^r(K_v,(i_*\mathcal{F})_v) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Notant que $supp(i_*\mathcal{F}) \subseteq Z$ d'après (a) et 1.10.7(d) on trouve $H_c^r(U,i_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^r(U,i_*\mathcal{F}) = H_Z^r(U,i_*\mathcal{F}) \simeq H^r(Z,\mathcal{F})$.

(d)Plus tard !

(e)Comme $\pi : U' \to U$ est fini, π_* est un foncteur exact, la suite spectrale de Leray implique que $H^r(U, \pi_*\mathcal{F}) \simeq H^r(U', \mathcal{F})$ pour tout r (cf. 1.9.7(3) et 1.10.5). On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Spec(K'_v) & \xrightarrow{\pi_v} & Spec(K_v) \\ \downarrow{\scriptstyle f'_v} & & \downarrow{\scriptstyle f_v} \\ U' & \xrightarrow{\pi} & U, \end{array}$$

notant que π est fini, on vérifie facilement $\pi_{v*} f'^*_v \mathcal{F} \simeq f^*_v \pi_* \mathcal{F}$, et de la même raison on a $H^r(K_v, (\pi_*\mathcal{F})_v) = H^r(K_v, \pi_{v*} f'^*_v \mathcal{F}) \simeq H^r(K'_v, \mathcal{F}_v)$ pour $\mathcal{F} \in Fais(U')$.

D'après (a), on a le diagramme commutatif suivant avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H^r_c(U, \pi_*\mathcal{F}) & \to & H^r(U, \pi_*\mathcal{F}) & \to & \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, (\pi_*\mathcal{F})_v) & \to & H^{r+1}_c(U, \pi_*\mathcal{F}) \to \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow \\ \to H^r_c(U', \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^r(U', \mathcal{F}) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin U} H^r(K'_v, \mathcal{F}_v) & \longrightarrow & H^{r+1}_c(U', \mathcal{F}) \longrightarrow \end{array}$$

on trouve donc $H^r_c(U', \mathcal{F}) \simeq H^r_c(U, \pi_*\mathcal{F})$ par 5-lemme.

(d)D'après le lemme 3.2.4 suivant on a une suite exacte

$$\cdots \to H^r(U, j_!\mathcal{F}) \to H^r(V, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(K_v, \mathcal{F}_v) \to \cdots$$

Dans la démonstration du lemme 3.2.4, au niveau de complexes, on sait que le cône de $i_3 : C^\bullet(U, j_!\mathcal{F}) \to C^\bullet(V, j_!\mathcal{F}|V) = C^\bullet(V, \mathcal{F})$ est quasi-isomorphe à $\bigoplus_{v \in U \setminus V} C^\bullet(K_v, \mathcal{F}_v)$ qui est le co-noyau de $i_1 : \bigoplus_{v \notin U} S^\bullet(K_v, \mathcal{F}_v) \hookrightarrow \bigoplus_{v \notin V} S^\bullet(K_v, \mathcal{F}_v)$, ou même le cône de i_1. Par définition on a un diagramme commutatif avec lignes exactes (notant que $(j_!\mathcal{F})_v = \mathcal{F}_v$ pour $v \notin U$ et $j_!\mathcal{F}|V = \mathcal{F}$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & (\bigoplus_{v \notin U} S^\bullet(K_v, \mathcal{F}_v))[1] & \to & C^\bullet(u(U, j_!\mathcal{F})) & \to & C^\bullet(U, j_!\mathcal{F}) & \to 0\ , \\ & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle i_3} & \\ 0 \to & (\bigoplus_{v \notin V} S^\bullet(K_v, \mathcal{F}_v))[1] & \longrightarrow & C^\bullet(u(V, \mathcal{F})) & \longrightarrow & C^\bullet(V, \mathcal{F}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

d'après la théorie d'algèbre homologique les cônes d'applications verticales forment un triangle distingué. On a déjà vu que $C^\bullet(i_1)$ est quasi-isomorphe à $C^\bullet(i_3)$, alors $C^\bullet(i_2)$ est quasi-isomorphe à 0, donc $H^r_c(U, j_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^r_c(V, \mathcal{F})$.

Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$, $j : V \to U$ et $i : U \setminus V \to U$, on a une suite exacte $0 \to j_! j^* \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F} \to 0$ d'après 1.9.8(5). L'assertion (b) se donne une suite exacte $\cdots \to H_c^r(U, j_!(\mathcal{F}|V)) \to H_c^r(U, \mathcal{F}) \to H_c^r(U, i_*i^*\mathcal{F}) \to H_c^{r+1}(U, j_!(\mathcal{F}|V)) \to \cdots$, on sait que $H_c^r(U, i_*i^*\mathcal{F}) \simeq H^r(U \setminus V, i^*\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(v, i_v^*\mathcal{F})$ d'après (c) et le lemme 3.2.7 suivant, la preuve est complète. $\square$

Lemme 3.2.4. *Pour $\mathcal{F} \in Fais(V)$ on a une suite exacte*

$$\cdots \to H^r(U, j_!\mathcal{F}) \to H^r(V, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(K_v, \mathcal{F}_v) \to \cdots .$$

Démonstration. Pour $j_!\mathcal{F} \in Fais(U)$ notant que $(j_!\mathcal{F})|V = \mathcal{F}$ on a une suite exacte

$$\cdots \to H_{U \setminus V}^r(U, j_!\mathcal{F}) \to H^r(U, j_!\mathcal{F}) \to H^r(V, \mathcal{F}) \to \cdots$$

d'après 1.10.7(f). D'après [18, MilneEC III.1.28] on a $H_v^r(U, j_!\mathcal{F}) \simeq H_v^r(U_v, j_!\mathcal{F})$ pour $v \in U \setminus V$, où $U_v = Spec(\mathcal{O}_v^h)$. Comme $\mathcal{O}_v^h$ est hensélien, $H_v^r(U_v, j_!\mathcal{F}) \simeq H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}_v)$ d'après le lemme 3.2.5 suivant. Le lemme 3.2.6 suivant dit que $H_{U \setminus V}^r(U, j_!\mathcal{F}) = \bigoplus_{v \in U \setminus V} H_v^r(U, j_!\mathcal{F})$. La preuve est alors complète. $\square$

Lemme 3.2.5. *On a un isomorphisme $H_v^r(U_v, j_!\mathcal{F}) \simeq H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}_v)$ pour $v \in U \setminus V$ et $\mathcal{F} \in Fais(V)$.*

Démonstration. On veut appliquer 3.1.1. On a un diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Spec(K_v) \arrow[r, "j_v"] \arrow[d, "f'_v"'] \arrow[dr, "f_v"] & U_v \arrow[d, "\alpha_v"] \\ V \arrow[r, "j"'] & U \end{tikzcd} .$$

Pour $\mathcal{F} \in Fais(V)$, on vérifie facilement que $\mathcal{F}_v = f_v'^*\mathcal{F} = f_v^*j_!\mathcal{F} = (j_!\mathcal{F})_v$. Maintenant on veut $H_v^r(U_v, \alpha_v^*j_!\mathcal{F}) \simeq H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}_v)$, d'après 3.1.1 il suffit de voir $j_{v!}f_v^*j_!\mathcal{F} = \alpha_v^*j_!\mathcal{F}$. Or $j_{v!}f_v^*j_!\mathcal{F} = j_{v!}(\alpha_v \circ j_v)^*j_!\mathcal{F} = j_{v!}j_v^*(\alpha_v^*j_!\mathcal{F})$, d'après 1.9.8(5) il suffit de voir $c_{v*}c_v^*\alpha_v^*j_!\mathcal{F} = 0$ où $c_v : Spec(k(v)) \to U_v = Spec(\mathcal{O}_v^h)$ est l'immersion fermée associée à v. D'après 1.9.7 et 1.9.8(4), notant que $v \in U \setminus V$ on vérifie que $c_{v*}c_v^*\alpha_v^*j_!\mathcal{F}$ est nul en tout fibre. $\square$

Lemme 3.2.6. *On a un isomorphisme $H_{U \setminus V}^r(U, j_!\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{v \in U \setminus V} H_v^r(U, j_!\mathcal{F})$.*

Démonstration. On simplifie les notations, $i_Z : Z \to X$ une immersion fermée, dans notre cas X est de dimension 1, alors $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ est un ensemble fini de points fermés de X, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "i_Z"] & & X \\ & z \arrow[ul, "\phi_z"] \arrow[ur, "i_z"'] & \end{tikzcd}$$

pour chaque $z \in Z$, on va montrer que $H^r_Z(X, \mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{z\in Z} H^r_z(X, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$.

En effet, par définition $H^r_Z(X, -)$ (resp. $H^r_z(X, -)$) est les foncteurs dérivés de $\Gamma_Z(X, -) = \Gamma(X, i_{Z*}i^!_Z -)$ (resp. $\Gamma_Z(X, -) = \Gamma(X, i_{z*}i^!_z -)$). Alors il suffit de voir que $i_{Z*}i^!_Z\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{z\in Z} i_{z*}i^!_z\mathcal{F}$, or ce n'est pas difficile de le vérifier notant que dans notre cas ϕ_z est une immersion fermée et une immersion ouverte à la fois. $\square$

Lemme 3.2.7. *On a un isomorphisme* $H^r(U\backslash V, i^*\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{v\in U\backslash V} H^r(v, i^*_v\mathcal{F})$.

Démonstration. Dans notre situation $Z = U \setminus V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble fini de points fermés de U. D'après le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] & X \\ Spec(k(v)) \arrow[u, "\gamma_v"] \arrow[ur, "i_v"'] & \end{tikzcd}$$

on se ramène à montrer $H^r(Z, \mathcal{G}) \simeq \bigoplus_{v\in Z} H^r(v, \gamma^*_v\mathcal{G})$ pour $\mathcal{G} \in Fais(Z)$. On sait que $\bigoplus_{v\in Z} H^r_v(Z, \mathcal{G}) = H^r_Z(Z, \mathcal{G}) = H^r(Z, \mathcal{G})$ (de la même méthode que 3.2.6), et que $H^r(v, \gamma^*_v\mathcal{G}) = H^r_v(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G})$ d'après 1.10.7(d), alors on se ramène à montrer $H^r_v(Z, \mathcal{G}) = H^r_v(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G})$.

On pose $\psi_v : Z \setminus \{v\} \to Z$ l'immersion ouverte associée à v. On sait que $H^r_v(Z, -)$ sont les foncteurs dérivés de $\Gamma_v(Z, -) = \Gamma(Z, ker(- \to \psi_{v*}\psi^*_v -))$ (cf. 1.9.8(5)). Comme $supp(\gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G}) \subseteq \{v\}$, $H^r_v(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G}) = H^r(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G})$. Comme γ_v est une immersion fermée et ouverte à la fois dans notre situation, le foncteur $\gamma_{v*}\gamma^*_v$ est exact et il préserve faisceaux injectifs, alors les foncteurs $H^r_v(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v -)$ sont foncteurs dérivés de $\Gamma(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v -)$. Finalement, notant que ψ_v est une immersion fermée et ouverte à la fois, on vérifie que $\Gamma(Z, \gamma_{v*}\gamma^*_v\mathcal{G}) = ker(\mathcal{G} \to \psi_{v*}\psi^*_v\mathcal{G})$, qui complète la preuve. $\square$

Remarque 3.2.8. En cas où K est un corps de fonctions, X est propre, d'après 3.2.3(a,d) pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ on a $H^r_c(U, \mathcal{F}) \simeq H^r_c(X, j_!\mathcal{F}) \simeq H^r(X, j_!\mathcal{F})$, c'est-à-dire que la cohomologie à support compact définie au début de cette sous-section est équivalente à la définition classique de la cohomologie à support compact (i.e. prenant une compactification de Nagata (cf. [18, MilneEC III.1.29])). Mais en cas d'un corps de nombres, les groupes $H^r_c(U, \mathcal{F})$ ne sont pas les mêmes que ceux classiques, mais ils sont les groupes qui fourniront la dualité parfaite.

Pour les groupes de cohomologie à support compact, on a aussi la suite exacte longue, alors, de la même façon que celle de la définition de l'accouplement de Yoneda de Ext (cf. la section 1.2), pour $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in Fais(U)$, il existe un accouplement canonique

$$Ext_U^r(\mathcal{F},\mathcal{F}') \times H_c^s(U,\mathcal{F}) \to H_c^{r+s}(U,\mathcal{F}').$$

Pour l'accouplement de faisceaux $\mathcal{F} \times \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ sur U, l'accouplement cup-produit standard $S^\bullet(K_v,\mathcal{F}_v) \times S^\bullet(K_v,\mathcal{F}'_v) \to S^\bullet(K_v,\mathcal{F}''_v)$ induit l'accouplement cup-produit

$$H_c^r(U,\mathcal{F}) \times H_c^s(U,\mathcal{F}') \to H_c^{r+s}(U,\mathcal{F}'').$$

Par définition, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^r(U,\mathcal{H}om_U(\mathcal{F},\mathcal{F}')) & \times & H_c^s(U,\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^{r+s}(U,\mathcal{F}') \\ \downarrow & & \| & & \| \\ Ext_U^r(\mathcal{F},\mathcal{F}') & \times & H_c^s(U,\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^{r+s}(U,\mathcal{F}') \end{array}$$

(cf. la fin de la section 1.2 et de la section 1.10).

3.2.3 Cohomologie de $\mathbb{G}_m$ à support compact

Proposition 3.2.9. *Les notations sont comme souvent. On a $H_c^2(U,\mathbb{G}_m) = 0$, $H_c^3(U,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $H_c^r(U,\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 4$.*

Démonstration. D'après 3.2.3(a), avec le théorème de Hilbert 90, le fait que $scd(Gal(K_v^s/K_v)) = 2$ (cf. 1.5.4) et le fait que $H^r(\mathbb{R},\mathbb{G}_m) = 0$ pour r impair, on a les suites exactes $0 \to H_c^2(U,\mathbb{G}_m) \to H^2(U,\mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v\notin U} Br(K_v) \to H_c^3(U,\mathbb{G}_m) \to H^3(U,\mathbb{G}_m) \to 0$ et $0 \to H_c^{2r}(U,\mathbb{G}_m) \to H^{2r}(U,\mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^{2r}(K_v,\mathbb{G}_m) \to H_c^{2r+1}(U,\mathbb{G}_m) \to H^{2r+1}(U,\mathbb{G}_m) \to 0$ pour $r \geqslant 2$. Si $U \subsetneq X$, alors 3.2.1 et 3.2.2(a) se donne l'assertion on veut. Le lemme prochain implique que les $H_c^r(U,\mathbb{G}_m)$ ne changent pas si l'on remplace U par $V \subseteq U$ si $r \geqslant 2$ d'après 3.2.3. □

Lemme 3.2.10. *Soit $i : Z \to U$ une immersion fermée telle que $\eta \notin Z$, alors $H^r(Z,i^*\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 1$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2.7 $H^r(Z,i^*\mathbb{G}_m) = \bigoplus_{v\in Z} H^r(v,i_v^*\mathbb{G}_m)$, on se ramène au cas où Z contient seulement un point fermé v. Maintenant $i^*\mathbb{G}_m$ est associé au g_v-module discret $\mathcal{O}_v^{nr\times}$, où $g_v = Gal(K_v^{nr}/K_v) = Gal(k(v)^s/k(v))$ (cf. 1.9.6). Alors $H^r(Z,i^*\mathbb{G}_m) = H^r(g_v,\mathcal{O}_v^{nr\times})$. Comme la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_v^{nr\times} \to K_v^{nr*} \stackrel{ord}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ de g_v-modules est scindée, $H^r(g_v,\mathcal{O}_v^{nr\times})$ est un facteur direct de $H^r(g_v,K_v^{nr*})$ qui est nul pour $r \geqslant 1$ (notant que Hilbert 90, $scd(g_v) = 2$ et $Br(K_v^s/K_v^{nr}) = 0$ cf. [19, MilneADT I.A.2]). □

Remarque 3.2.11. En cas de corps de nombres, 3.2.1 et 3.2.3(a) se donne une suite exacte

$$0 \to H^0_c(X, \mathbb{G}_m) \to \mathcal{O}_K^\times \to \bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} K_v^*/K_v^{*2} \to H^1_c(X, \mathbb{G}_m) \to Cl(K) \to 0.$$

En particulier, $H^0_c(X, \mathbb{G}_m) \simeq \{a \in \mathcal{O}_K^\times ; a_v > 0 \text{ pour tout } v \text{ réelle}\}$ les unités totalement positives de K.

On a aussi $H^1_c(X, \mathbb{G}_m) \simeq I(\mathcal{O}_K)/\{(a); a \in K^*,\ a_v > 0 \text{ pour tout } v \text{ réelle}\}$ le « narrow class group ». En effet, de la suite exacte $0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to g_*\mathbb{G}_{m,K} \to \bigoplus_{v \in X^0} i_{v*}\mathbb{Z} \to 0$ (cf. 1.9.3(2)), on trouve d'après 3.2.3(b,c) une suite exacte

$$H^0_c(X, g_*\mathbb{G}_m) \to H^0_c(X, \bigoplus_{v \in X^0} i_{v*}\mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in X^0} \mathbb{Z} \to H^1_c(X, \mathbb{G}_m) \to H^1_c(X, g_*\mathbb{G}_m).$$

La proposition 3.2.3(a) se donne une suite exacte (par calculer les fibres, on peut vérifier que $(g_*\mathbb{G}_m)_v = \mathbb{G}_m$)

$$0 \to H^0_c(X, g_*\mathbb{G}_m) \to H^0(X, g_*\mathbb{G}_m) = K^* \to$$
$$\bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} H^0(K_v, \mathbb{G}_m) = \bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} K_v^*/K_v^{*2} \to H^1_c(X, g_*\mathbb{G}_m) \to H^1(X, g_*\mathbb{G}_m).$$

On sait que $H^1(X, g_*\mathbb{G}_m) = 0$ (cf. la démonstration de la proposition 3.2.1). On trouve donc
$H^0_c(X, g_*\mathbb{G}_m) = \{\text{l'élément totalement positif de } K^*\}$, $H^1_c(X, g_*\mathbb{G}_m) = 0$
et $H^1_c(X, \mathbb{G}_m) \simeq \bigoplus_{v \in X^0} \mathbb{Z}/\{\text{l'élément totalement positif de } K^*\}$ est exactement le « narrow class group » de K.

3.2.4 Cohomologie de faisceaux localement constants

Soit U un ouvert *affine*[5] non-vide de X, on pose $S = (X \setminus U) \bigsqcup S_\infty$ un ensemble fini de places de K. En cas de corps de fonctions, la condition U est affine est équivalente à dire que $U \neq X$ d'après le théorème de Riemann-Roch, i.e. S contient au mois qu'une place non-archimédienne.

On note η le point générique de U (ou de X), K le corps résiduel de U (ou de X) en η, alors $\pi_1(U, \bar{\eta}) = Gal(K_S/K) = G_S$ (cf. [18, MilneEC I.5.2]). On sait que $U = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$ (cf. la section 2.4 pour les notations), et on note $\widetilde{U} = Spec(\mathcal{O}_S)$ où $\mathcal{O}_S$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{K,S}$ dans K_S, c'est le *revêtement universel* de U, alors $G_S = \pi_1(U, \bar{\eta}) = Aut_U \widetilde{U}$ et $\pi_1(\widetilde{U}) = 1$. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ se donne une équivalence de la catégorie de faisceaux localement constants de fibres finies sur $U_{\text{ét}}$ vers la catégorie de G_S-modules finis discrets (cf. 1.9.5 ou [18, MilneEC I.5.2(b)]).

[5]Seulement dans cette sous-section, on suppose que U est un ouvert *affine*, lorsque on voit « U un ouvert » c'est-à-dire que U est un ouvert arbitraire non-vide de X.

Proposition 3.2.12. *Soit $\mathcal{F} \in Fais(U)$ localement constant constructible avec U un ouvert affine de X, on pose $M = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$, alors le groupe $H^r(U, \mathcal{F})$ est de torsion pour $r \geqslant 0$, et $H^r(U, \mathcal{F})(l) = H^r(G_S, M)(l)$ pour tout r si l est inversible sur U ou $l = car(K)$.*

Démonstration. On a la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^r(G_S, H^s(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U})) \Rightarrow H^{r+s}(U, \mathcal{F})$ cf. 1.10.3. Évidemment, $H^0(U, \mathcal{F})$ est fini car $\mathcal{F}$ est constructible. D'après la suite spectrale ci-dessus, pour $H^r(U, \mathcal{F})$ étant de torsion il suffit de montrer que $H^s(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U})$ est de torsion pour $s \geqslant 1$. Pour la dernière assertion, on a besoin de montrer que $H^0(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U}) = M$ et $H^s(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U})(l) = 0$ pour $s \geqslant 1$ si l est inversible sur U ou $l = car(K)$.

On sait que $\mathcal{F}|\widetilde{U}$ est constant car $\mathcal{F}$ est localement constant et $\widetilde{U}$ est le revêtement universel de U, alors $H^0(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U}) = M$ et $H^s(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U})$ est de torsion pour tout s.

Il y a deux cas à considérer, (i)$\mathcal{F}|\widetilde{U} = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ avec l inversible sur U; (ii)$\mathcal{F}|\widetilde{U} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p = car(K)$ où K est un corps de fonctions.

D'abord, d'après [18, MilneEC III.4.7,4.8 et la discusion après 4.2] on trouve que $H^1(\widetilde{U}, \mathcal{F}|\widetilde{U}) \simeq Hom_{cts}(\pi_1(\widetilde{U}), \mathcal{F}(\widetilde{U})) = 0$. Alors on suppose $s \geqslant 2$ d'ici à la fin de la démonstration.

(i)$\mathcal{F}|\widetilde{U} = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ avec l inversible sur $U = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$. Comme l est inversible, $\mathcal{O}_S$ contient les racines l^{ime} d'unité, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \simeq \mu_l$ dans $Fais(\widetilde{U})$. On a la suite exacte de Kummer $0 \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \mu_l \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{l} \mathbb{G}_m \to 0$ dans $Fais(\widetilde{U})$, d'où les suites exactes $0 = H^1(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{l} H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \to H^2(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)_l \to 0$ et $\cdots \to H^r(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \to \cdots$ pour $r \geqslant 2$.

Pour un revêtement $V_i \to U$ étale fini de U, V_i est aussi affine et $V_i = Spec(\mathcal{O}_{K_i,S})$ où K_i est le corps de fonctions de V_i, on a $H^1(V_i, \mathbb{G}_m) = Pic(Spec(\mathcal{O}_{K_i,S}))$ d'après 3.2.1. Comme $\widetilde{U} = \varprojlim V_i$, $H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \simeq \varinjlim H^1(V_i, \mathbb{G}_m)$ d'après 1.10.2.

Si K est un corps de nombres, $Pic(Spec(\mathcal{O}_{K_i,S})) = Cl_S(K_i)$ est fini, si K est un corps de fonctions, V_i est affine dans notre cas, le groupe de Picard est aussi fini, alors $H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)$ est de torsion. L'injectivité de $l : H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) \to H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)$ implique que $H^1(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)(l) = 0$, alors $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)$ est injective car $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ est de l-torsion.

Maintenant, on va montrer que $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)(l) = 0$.

On prend L une extension finie de K dans K_S telle que $L \supseteq \mu_l(K^s)$. D'après 3.2.2(a) on a une suite exacte $0 \to Br(\mathcal{O}_{L,S}) \to \bigoplus_{w \in S_L} Br(L_w) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ où $Br(\mathcal{O}_{L,S}) = H^2(Spec(\mathcal{O}_{L,S}), \mathbb{G}_m)$ (pour le cas K un corps de nombres et $U = X$ affine, le fait que l est inversible sur U implique que $l = 1$, rien à montrer). On a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & Br(\mathcal{O}_{L,S}) & \longrightarrow & \bigoplus_{w\in S_L} Br(L_w) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow & Br(\mathcal{O}_{L',S}) & \longrightarrow & \bigoplus_{w'\in S_{L'}} Br(L'_{w'}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Br(L_w) & \xrightarrow{inv} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle Res} & & \downarrow{\scriptstyle [L'_{w'}:L_w]} \\ Br(L'_{w'}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

pour L' une extension finie de L. Alors $a \in Br(\mathcal{O}_{L,S})_l$ devient 0 dans $Br(\mathcal{O}_{L',S})$ si $l \mid [L'_{w'} : L_w]$ pour chaque $w' \in S_{L'}$. On note H le corps de classes de Hilbert de L, alors pour $w \in S_L$ un idéal de $\mathcal{O}_L$, $w\mathcal{O}_H$ est un idéal premier principal engendré par $c_w \in \mathcal{O}_H$ (cf. [1, Artin-Tate] ça marche aussi pour un corps de fonctions car le groupe des classes est fini d'après la condition que U est affine). On pose $L' = H(c_w^{1/l}, w \in S_L)$, alors L' est une extension finie de L dans K_S et $L'_{w'} \supseteq H_w(c_w^{1/l}) \supseteq H_w \supseteq L_w$. Notant que H est non-ramifiée en w sur L, $X^l - c_w \in H_w[X]$ est un polynôme d'Eisenstein de degré l, alors $l \mid [H_w(c_w^{1/l}) : H_w] \mid [L'_{w'} : L_w]$. Alors $a \in Br(\mathcal{O}_{L,S})_l$ devient 0 dans $Br(\mathcal{O}_{L',S})$, $\varinjlim_L Br(\mathcal{O}_{L,S})_l = 0$ où L courant les extensions (galoisiennes) finies de K dans K_S. Du même argument, $\varinjlim_L Br(\mathcal{O}_{L,S})_{l^t} = 0$ pour tout $t \geqslant 1$, et alors $\varinjlim_L Br(\mathcal{O}_{L,S})(l) = 0$ D'après 1.10.2, $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)(l) = \varinjlim_L Br(\mathcal{O}_{L,S})(l) = 0$, donc $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$.

D'après 3.2.2(a), $H^r(Spec(\mathcal{O}_{L,S}), \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 3$ (on peut prendre L totalement imaginaire), alors $H^r(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)(l) = 0$ pour $r \geqslant 3$ d'après 1.10.2.

De la suite exacte longue au début de la démonstration, on a $0 \to H^r(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)^{(l)} \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)_l \to 0$ pour $r \geqslant 2$, d'après les discussions ci-dessus $H^r(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)^{(l)} = 0$ (pour $r = 2$, notant que $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)(l) = 0$ et que $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)$ est de torsion car dans notre cas $Br(\mathcal{O}_{L,S}) \subseteq \bigoplus_{w\in S_L} Br(L_w)$ est de torsion, $H^2(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m) = \varinjlim Br(\mathcal{O}_{L,S})$) et $H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{G}_m)_l = 0$ pour $r \geqslant 2$, donc $H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 2$.

(ii)$\mathcal{F}|\widetilde{U} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $p = car(K)$ où K est un corps de fonctions. On sait que $H^r(\widetilde{U}_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\widetilde{U}}) \simeq H^r(\widetilde{U}_{Zar}, \mathcal{O}_{\widetilde{U}}) = 0$ pour $r \geqslant 1$, où la première égalité vient de 1.10.6 et la seconde égalité est clair au niveau fini d'après [13, Hartshorne III.3.5], ensuite on prend la limite (cf. 1.10.2). De la suite de cohomologie associée à la suite d'Artin-Schreier $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{\widetilde{U}} \to \mathcal{O}_{\widetilde{U}} \to 0$ (cf. 1.9.3), on trouve $H^r(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 2$. □

Remarque 3.2.13. La proposition précédente est vraie aussi pour $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$, i.e. $H^r(U, \mathbb{Z})$ est de torsion pour $r \geqslant 1$ et $H^r(U, \mathbb{Z})(l) = H^r(G_S, \mathbb{Z})(l)$ pour tout r et l satisfaisant les condition dans la proposition.

En effet, on a besoin de voir que $H^s(\widetilde{U}, \mathbb{Z})$ est de torsion pour $s \geqslant 1$ et $H^s(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) = 0$ pour $s \geqslant 1$. La première assertion vient du lemme 3.2.14

suivant pour niveaux finis, et on prend la limite. On a une suite exacte $\cdots \to H^r(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{l} H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z}) \to \cdots$ pour $r \geqslant 1$, dont tous les groupes sont de torsion, alors la suite $\cdots \to H^r(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(l) \to H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) \xrightarrow{l} H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) \to \cdots$ est exacte pour $r \geqslant 1$. On a vu que $H^r(\widetilde{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(l) = 0$ d'après la proposition, alors $H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) \xrightarrow{l} H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) \to \cdots$ est injective, $H^{r+1}(\widetilde{U}, \mathbb{Z})(l) = 0$ pour $r \geqslant 1$. On sait que $H^1(\widetilde{U}, \mathbb{Z}) = Hom_{cts}(\pi_1(\widetilde{U}), \mathbb{Z}) = 0$ car π_1 est un groupe profini.

Lemme 3.2.14. *Soit Y un schéma normal noetherien, pour $\mathcal{F} \in Fais(Y)$ constant, alors $H^r(Y, \mathcal{F})$ est de torsion pour $r \geqslant 1$, c'est 0 si $\mathcal{F}$ est uniquement divisible.*

Démonstration. On peut supposer que Y est connexe, on pose $g : \eta \to Y$ le point générique, alors $g_* g^* \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est constant (cf. [18, MilneEC II.3.7]), et les fibres de $R^r g_*(g^*\mathcal{F})$ sont les cohomologies galoisiennes (cf. [18, MilneEC III.1.15]) ce sont de torsion pour $r \geqslant 1$. Si $\mathcal{F}$ est uniquement divisible, alors $n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme, alors $n : R^r g_*(g^*\mathcal{F}) \to R^r g_*(g^*\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout n, on a donc $R^r g_*(g^*\mathcal{F}) = 0$. pour $r \geqslant 1$. La suite spectrale de Leray 1.10.5 $H^r(Y, R^s g_*(g^*\mathcal{F})) \Rightarrow H^{r+s}(\eta, g^*\mathcal{F})$ implique que $H^r(Y, g_*g^*\mathcal{F} = \mathcal{F}) \simeq H^r(\eta, g^*\mathcal{F}) = 0$ pour $r \geqslant 1$ car $g^*\mathcal{F}$ est aussi uniquement divisible.

Maintenant, $\mathcal{F}$ est constant, pour montrer que $H^r(Y, \mathcal{F})$ est de torsion pour $r \geqslant 1$, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est sans torsion. La suite de cohomologie associée à la suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}/\mathcal{F} \to 0$ se donne une surjection $H^{r-1}(Y, \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}/\mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^r(Y, \mathcal{F})$ pour $r \geqslant 1$ car $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}$ est uniquement divisible. On sait que $H^{r-1}(Y, \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}/\mathcal{F})$ est de torsion car $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}/\mathcal{F}$ est de torsion, alors $H^r(Y, \mathcal{F})$ est de torsion pour $r \geqslant 1$. □

Corollaire 3.2.15. *Soit U un ouvert affine de X, on pose $S = (X \setminus U) \coprod S_\infty \neq \emptyset$.*

(a)Pour $r < 0$ on a $H^r_c(U, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{v \in S^{\mathbb{R}}} H^{r-1}(K_v, \mathbb{Z})$, en particulier $H^r_c(U, \mathbb{Z}) = 0$ si $r < 0$ est impair.

(b)Il existe une suite exacte

$$0 \to H^0_c(U, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to \bigoplus_{v \in S} H^0(K_v, \mathbb{Z}) \to H^1_c(X, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Si S contient au moins une place non-archimédienne, alors $H^0_c(U, \mathbb{Z}) = 0$.

(c)Il existe une suite exacte

$$0 \to H^2_c(U, \mathbb{Z}) \to H^2(U, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_{v \in S} H^2(K_v, \mathbb{Z}) \to H^3_c(U, \mathbb{Z}) \to H^3(U, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Pour l inversible sur U ou $l = car(K) \neq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to H_c^2(U,\mathbb{Z})(l) \to H^2(G_S,\mathbb{Z})(l) \to \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v,\mathbb{Z})(l) \to$$
$$H_c^3(U,\mathbb{Z})(l) \to H^3(G_S,\mathbb{Z})(l) \to 0.$$

(d)Pour $r \geqslant 4$, $H_c^r(U,\mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration. On a une suite exacte

$$\cdots \to H_c^r(U,\mathbb{Z}) \to H^r(U,\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{v\in S} H^r(K_v,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

d'après 3.2.3(a).

(a)Pour $r < 0$, $H^r(U,\mathbb{Z}) = 0$ alors $H_c^r(U,\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{v\in S} H^{r-1}(K_v,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^{r-1}(K_v,\mathbb{Z})$. Si r est impair, on sait que $H^{r-1}(\mathbb{R},\mathbb{Z}) = 0$.

(b)On sait que$H^0(U,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^1(U,\mathbb{Z}) = Hom_{cts}(\pi_1(U,\bar{\eta}),\mathbb{Z}) = 0$ (cf. la démonstration de 3.2.12). Alors on trouve

$$0 \to H_c^0(U,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to \bigoplus_{v\in S} H^0(K_v,\mathbb{Z}) \to H_c^1(U,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Si S contient au moins une place non-archimédienne, $\mathbb{Z} \to \bigoplus_{v\in S} H^0(K_v,\mathbb{Z})$ est injective, alors $H_c^0(U,\mathbb{Z}) = 0$

(c)On sait que, en tout cas, $H^1(K_v,\mathbb{Z}) = H^3(K_v,\mathbb{Z}) = 0$(notant que $scd(Gal(K_v^s/K_v)) = 2$ pour v non-archimédienne avec périodicité pour v archimédienne), alors la première suite exacte d'assertion en suit. Pour l inversible sur U ou $l = car(K) \neq 0$, d'après 3.2.13, on identifie $H^r(U,\mathbb{Z})(l)$ avec $H^r(G_S,\mathbb{Z})(l)$ pour $r \geqslant 1$.

(d)Pour $r \geqslant 4$, le groupe $H^r(K_v,\mathbb{Z})$ disparaît si v est non-archimédienne car $scd(Gal(K_v^s/K_v)) = 2$ (cf. 1.5.4). On sait que $H_c^r(U,\mathbb{Z})$ est de torsion pour $r \geqslant 4$ d'après 3.2.13 et la suite au début de cette démonstration. Si l est inversible sur U, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{r-1}(G_S,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^{r-1}(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) . \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ H^r(G_S,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,\mathbb{Z}) \end{array}$$

D'après 2.4.8(c), la partie l-primaire de la première ligne du diagramme ci-dessus est un isomorphisme car $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(l)$ est une limite de G_S-modules triviaux finis de l-torsion, alors on trouve $H^r(G_S,\mathbb{Z})(l) \simeq \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_V,\mathbb{Z})(l)$ pour $r \geqslant 4$. On sait que $\bigoplus_{v\in S} H^3(K_v,\mathbb{Z}) = 0$ (cf. (c) ci-dessus), on identifie

$H^r(G_S, \mathbb{Z})(l)$ avec $H^r(U, \mathbb{Z})(l)$ d'après 3.2.13, alors $H_c^r(U, \mathbb{Z})(l) = 0$ pour $r \geqslant 4$ et l inversible sur U.

Pour $V \subseteq U$ un autre ouvert et $v \in U \setminus V$, $H^r(v, i_v^* \mathcal{F}) = 0$ pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ et $r \geqslant 3$ car $scd(Gal(k(v)^s/k(v))) = 2$ (cf. 1.5.4), alors 3.2.3(d) implique que $H_c^r(V, \mathbb{Z}) = H_c^r(U, \mathbb{Z})$ pour $r \geqslant 4$. Alors si K est un corps de nombres, pour chaque nombre premier l, on prend V assez petit tel que l soit inversible sur V, on a $0 = H_c^r(V, \mathbb{Z})(l) = H_c^r(U, \mathbb{Z})(l)$ pour $r \geqslant 4$, alors $H_c^r(U, \mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 4$.

La situation reste à montrer est que K est un corps de fonction de caractéristique $p \neq 0$, on veut $H_c^r(U, \mathbb{Z})(p) = 0$. Maintenant U est affine, la suite d'Artin-Schreier se donne le fait que $H^r(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 2$ (cf. la fin de la démonstration de 3.2.12). Alors la suite de cohomologie associée à $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ se donne une injection $H^r(U, \mathbb{Z}) \overset{p}{\hookrightarrow} H^r(U, \mathbb{Z})$ pour $r \geqslant 3$. D'après 3.2.13, $H^r(U, \mathbb{Z})$ est torsion, alors $H^r(U, \mathbb{Z})(p) = 0$ pour $r \geqslant 3$. La suite au début de cette démonstration et le fait que $scd(Gal(K_v^s/K_v)) = 2$ impliquent que $H_c^r(U, \mathbb{Z}) \simeq H^r(U, \mathbb{Z})$ pour $r \geqslant 4$, la preuve est alors complète. □

Remarque 3.2.16. Conjecturement, $scd_l(G_S) = 2$ pour l inversible sur U, si c'est vrai, on a une surjection $\bigoplus_{v \in S} H^2(K_v, \mathbb{Z})(l) \twoheadrightarrow H_c^3(U, \mathbb{Z})(l)$.

3.2.5 Caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit U un ouvert de X, et soit $\mathcal{F} \in Fais(U)$ constructible tel qu'il existe un entier m satisfaisant $m\mathcal{F} = 0$ et m inversible sur U. Alors les groupes $H^r(U, \mathcal{F})$ et $H_c^r(U, \mathcal{F})$ sont finis (cf. la démonstration du théorème suivant). On définit

$$\chi(U, \mathcal{F}) = \frac{[H^0(U, \mathcal{F})] \cdot [H^2(U, \mathcal{F})]}{[H^1(U, \mathcal{F})] \cdot [H^3(U, \mathcal{F})]},$$

et

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \frac{[H_c^0(U, \mathcal{F})] \cdot [H_c^2(U, \mathcal{F})]}{[H_c^1(U, \mathcal{F})] \cdot [H_c^3(U, \mathcal{F})]}$$

On fait attention que c'est possible que H_c^r ou H^r est non-nul pour $r \neq 0, 1, 2, 3$, alors χ et χ_c ne sont pas additives en $\mathcal{F}$.

Théorème 3.2.17. *Pour un faisceau constructible $\mathcal{F} \in Fais(U)$ tel que $m\mathcal{F} = 0$ pour un certain m inversible sur U, alors*

(a)les groupes $H^r(U, \mathcal{F})$ sont finis et

$$\chi(U, \mathcal{F}) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[\mathcal{F}(K_v)]}{[H^0(K_v, \mathcal{F})] \cdot |[\mathcal{F}(K^s)]|_v}$$

(notant que $\mathcal{F}(K^s) = \mathcal{F}_{\bar{\eta}} = \mathcal{F}(K_v^s)$*),*

(b)les groupes $H_c^r(U, \mathcal{F})$ *sont finis et*

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \prod_{v \in S_\infty} [\mathcal{F}(K_v)]$$

(notant que $\mathcal{F}(K_v) = H^0(G_v, \mathcal{F}_{\bar{\eta}})$*).*

Démonstration. (a)On choisit un ouvert affine $V \subseteq U$ tel que $\mathcal{F}|V$ soit localement constant (cf. 1.9.13), d'après 3.2.12 $H^r(V, \mathcal{F}|V) \simeq H^r(G_S, M)$ où $M = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ et $S = (X \setminus V) \coprod S_\infty$. D'après 2.4.12 et 2.4.20, $H^r(V, \mathcal{F}|V)$ sont finis et $\chi(V, \mathcal{F}|V) \cdot [H^3(G_S, M)] = \chi(G_S, M) = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[H^0(G_v, M)]}{|[M]|_v} = \prod_{v \in S_\infty} \frac{[\mathcal{F}(K_v)]}{|[\mathcal{F}(K^s)]|_v}$. Le théorème 2.4.8(c) implique que $H^3(G_S, M) \simeq \prod_{v \in S_\infty} H^3(K_v, M)$ et on sait que $[H^3(K_v, M)] = [H^0(K_v, M)]$ pour $v \in S^{\mathbb{R}}$ par périodicité, alors l'assertion pour la paire $(V, \mathcal{F}|V)$ est prouvée.

On va montrer $\chi(U, \mathcal{F}) = \chi(V, \mathcal{F}|V)$ et voir la finitude de $H^r(U, \mathcal{F})$. D'après 1.10.7(f) on a une suite exacte

$$\cdots \to H^r_{U \setminus V}(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to H^r(V, \mathcal{F}|V) \to \cdots .$$

D'après la démonstration du lemme 3.2.6 et [18, MilneEC III.1.28], on a $H^r_{U \setminus V}(U, \mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{v \in U \setminus V} H_v^r(U_v, \mathcal{F})$ où $U_v = Spec(\mathcal{O}_v^h)$. Alors $\chi(U\mathcal{F}) = \chi(V, \mathcal{F}|V) \cdot \prod_{v \in U \setminus V} \chi_v(U_v, \mathcal{F})$ car $H^{-1}(V, \mathcal{F}|V) = 0$ et $H_v^4(U_v, \mathcal{F}) = 0$ d'après le théorème 3.1.9. D'après 1.10.7(f), on a une autre suite exacte

$$\cdots \to H_v^r(U_v, \mathcal{F}) \to H^r(U_v, \mathcal{F}) \to H^r(Spec(K_v), \mathcal{F}) \to \cdots$$

pour chaque $v \in U \setminus V$, alors $\chi_v(U_v, \mathcal{F}) = \chi(U_v, \mathcal{F}) \chi(Spec(K_v), \mathcal{F})^{-1}$ car $H^{-1}(Spec(K_v), \mathcal{F}) = 0$ et $H_v^4(U_v, \mathcal{F}) = 0$. On sait que $H^r(Spec(K_v), \mathcal{F}) = H^r(G_v, \mathcal{F}_{\bar{\eta}})$, alors 2.2.6 implique que $\chi(Spec(K_v), \mathcal{F}) = 1$. La proposition 3.1.1(b) dit que $H^r(U_v, \mathcal{F}) \simeq H^r(v, \mathcal{F}) = H^r(g_v, \mathcal{F}_{\bar{v}})$, alors $\chi(U_v, \mathcal{F}) = 1$ d'après [28, SerreCorpsLoc III.1]. Donc $\chi(U, \mathcal{F}) = \chi(V, \mathcal{F}|V)$ et la finitude des $H^r(U, \mathcal{F})$ est claire d'après les suites exactes précédentes.

(b)D'après 3.2.3(d) on a une suite exacte

$$\cdots \to H_c^r(v, \mathcal{F}|V) \to H_c^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(v, i_v^* \mathcal{F}) \to \cdots ,$$

on a déjà vu $\chi(v, i_v^* \mathcal{F}) = 1$, alors la suite se donne une égalité $\chi_c(U, \mathcal{F}) = \chi_c(V, \mathcal{F}|V)$ car $H^{-1}(v, i_v^* \mathcal{F}) = 0$ pour $v \in U \setminus V$ et $H^3(v, i_v^* \mathcal{F}) = 0$ car $scd(Gal(k(v)^s/k(v))) = 2$ (cf. 1.5.4). Alors on peut supposer que $U \subsetneq X$ est un ouvert affine et que $\mathcal{F}$ est localement constant. D'après 3.2.3(a), la suite

$0 \to \prod_{v\notin U} H^{-1}(K_v,\mathcal{F}) \to H^0_c(U,\mathcal{F}) \to H^0(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\notin U} H^0(K_v,\mathcal{F}) \to \cdots \to H^3_c(U,\mathcal{F}) \to H^3(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\notin U} H^3(K_v,\mathcal{F}) \to 0$ est exacte, où la surjectivité de la dernière application vient du théorème 2.4.8(c) et 3.2.12. Pour $v \in S_\infty$, $H^r(K_v,\mathcal{F}_{\bar\eta}) = H^r_T(G_v,\mathcal{F}_{\bar\eta})$ sont de même ordre pour tout r d'après périodicité, on sait aussi que $H^r(K_v,\mathcal{F}) = H^r(G_v,\mathcal{F}_{\bar\eta})$. Pour v non-archimédienne, on sait que $scd(G_v) = 2$. D'après le calcul facile de la suite ci-dessus, on trouve la formule

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi(U,\mathcal{F}) \times \prod_{v\in X\setminus U} \chi(K_v,\mathcal{F})^{-1} \times \prod_{v\in S_\infty} [H^0(K_v,\mathcal{F})].$$

Le théorème 2.2.6 implique que $\chi(K_v,\mathcal{F}) = |[\mathcal{F}(K_v^s)]|_v$ pour $v \in X$, on a

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \prod_{v\in S_\infty} [\mathcal{F}(K_v)] \times \prod_{v\notin U} |\mathcal{F}(K_v^s)|_v^{-1}$$

d'après (a). Or le théorème 2.2.6 dit que $\chi(K_v,\mathcal{F}) = |[\mathcal{F}_{\bar\eta}]|_v$ pour $v \in U$, alors la formule de produit implique $\prod_{v\notin U} |[\mathcal{F}_{\bar\eta}]|_v = 1$, donc $\chi_c(U,\mathcal{F}) = \prod_{v\in S_\infty} [\mathcal{F}(K_v)]$. □

Remarque 3.2.18. Avec toutes les hypothèses du théorème. On va montrer le théorème d'Artin-Verdier, qui dit que pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ localement constant, $H^r(U,\mathcal{F})$ et $H^{3-r}_c(U,\mathcal{F}^D)$ sont duaux où $\mathcal{F}^D = \mathcal{H}om_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$, alors il faut avoir $\chi(U,\mathcal{F})\chi_c(U,\mathcal{F}^D) = 1$. On pose $M = \mathcal{F}_{\bar\eta}$ alors $(\mathcal{F}^D)_{\bar\eta} = Hom(M,K^{s*}) = M^D$ d'après 1.9.10. Or le théorème se donne la formule

$$\chi(U,\mathcal{F})\chi_c(U,\mathcal{F}^D) = \prod_{v\in S_\infty} \frac{[H^0(G_v,M)][H^0(G_v,M^D)]}{|[M]|_v[H^0(K_v,M)]} = 1$$

d'après le théorème . Notre résultats sont compatibles.

3.3 Théorème d'Artin-Verdier

3.3.1 Théorème d'Artin-Verdier

D'après la proposition 3.2.9, on a $H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour un ouvert U de X, d'après la démonstration de 3.2.9, pour $V \subseteq U$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^3_c(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

pour $v \notin U$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Br(K_v) & \xrightarrow{inv} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \| \\ H^3_c(U,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

On a un accouplement

$$Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U,\mathcal{F}) \to H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et on pose

$$\alpha^r(U,\mathcal{F}) : Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \to H^{3-r}_c(U,\mathcal{F})^*$$

(cf. la fin de la sous-section 3.2.2).

Théorème 3.3.1 (Artin-Verdier). [6] *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur $U_{ét}$, alors l'accouplement*

$$Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U,\mathcal{F}) \to H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

On remarque que si $\mathcal{F}$ est sans $car(K)$-torsion, d'après 3.2.3(a) et 2.2.4 $H^r_c(U,\mathcal{F})$ et $H^r(U,\mathcal{F})$ sont différents au plus des groupes finis, alors $H^r(U,\mathcal{F})$ est aussi fini.

Corollaire 3.3.2. *Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$, $j : U \to X$ et l un nombre premier, on a un accouplement parfait de groupes finis*

$$Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)(l) \times H^{3-r}(X,j_!\mathcal{F})(l) \to H^3(X,j_!\mathbb{G}_m)(l) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(l) = \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$$

sauf que le cas $l = 2$ lorsque K un corps de nombres avec places réelles.

Démonstration. D'après 3.2.3 on a $H^r_c(U,\mathcal{F}) \simeq H^r_c(X,j_!\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$. La proposition 3.2.3(a) dit que la différence entre $H^r_c(X,j_!\mathcal{F})$ et $H^r(X,j_!\mathcal{F})$ est au plus des groupes finis de 2-torsion, les deux groupes sont le même si K n'a pas de places réelles, alors l'assertion suit du théorème d'Artin-Verdier 3.3.1. □

Corollaire 3.3.3. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant constructible sur $U_{ét}$ tel que $m\mathcal{F} = 0$ pour un certain m inversible sur U, on pose $\mathcal{F}^D = \mathcal{H}om_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \in Fais(U)$, alors on a un accouplement parfait de groupes finis*

$$H^r(U,\mathcal{F}^D) \times H^{3-r}_c(U,\mathcal{F}) \to H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

[6] Pour les résultats sur les faisceaux qui ne sont pas de torsion, on réfère à [6, Deninger1986].

Démonstration. On va identifier les groupes $Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ et $H^r(U,\mathcal{F}^D)$, alors il en suit l'assertion d'après le théorème d'Artin-Verdier. D'après 1.10.4 on a une suite spectrale

$$H^r(U,\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow Ext^{r+s}_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m).$$

On sait que pour $\mathcal{F}$ localement constant,

$$\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)_{\bar{v}} = Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{v}},\mathbb{G}_{m\bar{v}}) = \begin{cases} Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{\eta}},K^{s*}), & v=\eta; \\ Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{v}},\mathcal{O}_v^{nr\times}), & v \text{ est un point fermé}. \end{cases}.$$

(cf. 1.9.10). Or $\mathcal{F}_{\bar{v}}$ est tué par m inversible sur U, $\mathcal{O}_v^{nr\times}$ est m-divisible d'après le lemme de Hensel, K^{s*} est aussi m-divisible. Les Ext^s sont nuls pour $s \geqslant 1$, alors $Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) = H^r(U,\mathcal{F}^D)$. □

Remarque 3.3.4. Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ constructible, on peut définir $\mathcal{F}^D = R\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ un objet de la catégorie dérivée de $Fais(U)$, satisfaisant le même accouplement parfait, et lorsque $\mathcal{F}$ est localement constant constructible $\mathcal{F}^D$ est le même que le faisceau $\mathcal{F}^D$ dans le corollaire 3.3.3 (cf. [19, MilneADT II.3.3]).

3.3.2 Démonstration du théorème principal

La démonstration du théorème d'Artin-Verdier est longue, mais pas très difficile. D'abord, on se ramène au cas simple, il y a quelques étapes, grosso modo,

(i)on pauvre le théorème en supposant que $supp(\mathcal{F})$ est fini,

(ii)on peut remplacer U par un ouvert V plus petit, alors on peut supposer que $\mathcal{F}$ est localement constant constructible, et $m\mathcal{F}=0$ avec m inversible sur V (sauf que le cas K est un corps de fonctions de caractéristique p et m est une puissance de p),

(iii)on peut remplacer U par un revêtement étale fini U' de U, alors on peut supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau constant constructible et que K est totalement imaginaire.

Ensuite, on développe une machine pour récurrence, et montre que les groupes considérés disparaissent pour indices assez grands.

Enfin, appliquant la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré on vérifie le théorème pour un faisceau constant constructible. Afin de completer la preuve, on applique la théorie d'Artin-Schreier pour le cas supplémentaire de corps de fonctions.

Toutes les notations sont les mêmes que celles dans les sections précédentes.

Lemme 3.3.5. *Le théorème 3.3.1 est vrai pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ de support dans un fermé propre de U.*

Démonstration. On pose $Z = supp(\mathcal{F}) = \{v_1, \ldots, v_s\} \subsetneq U$ et $i_t : v_t \to U$ l'immersion fermée associée, alors $\mathcal{F} \simeq i_{1*}i_1^*\mathcal{F} \oplus \cdots \oplus i_{s*}i_s^*\mathcal{F}$, on peut donc supposer que $Z = \{v\}$ contient seulement un point fermé de U, et $\mathcal{F}$ est de la forme $i_*\mathcal{F}$ où $i = i_v$ et $\mathcal{F} \in Fais(v)$ La suite exacte $0 \to \mathbb{G}_m \to g_*\mathbb{G}_m \to \bigoplus_{u\in U^0} i_{u*}\mathbb{Z} \to 0$ (cf. 1.9.3(2)) se donne une suite de cohomologie

$$\cdots \to Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, g_*\mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{u\in U^0} Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, i_{*u}\mathbb{Z}) \to \cdots .$$

On sait que $R^s g_*\mathbb{G}_m = 0$ pour $s \geqslant 1$ (cf. la démonstration de la proposition 3.2.1). Notant que g_* a un foncteur adjoint à gauche g^* qui est exact, alors g_* est exact à gauche et il préserve objets injectifs, la même preuve que 1.10.7(b) se donne une suite spectrale $Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, R^s g_*\mathbb{G}_m) \Rightarrow Ext^{r+s}_\eta((i_*\mathcal{F})|\eta, \mathbb{G}_m)$, alors $Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, g_*\mathbb{G}_m) = Ext^r_\eta((i_*\mathcal{F})|\eta, \mathbb{G}_m) = 0$ car $(i_*\mathcal{F})|\eta = 0$. D'après 1.10.7(c), on a $Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, i_{u*}\mathbb{Z}) \simeq Ext^r_u(i_u^* i_*\mathcal{F}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & u \neq v, \\ Ext^r_v(\mathcal{F}, \mathbb{Z}), & u = v. \end{cases}$ Alors la suite ci-dessus se donne $Ext^{r-1}_v(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \simeq Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ pour tout r. On pose M le g_v-module discret associé à $\mathcal{F}$ (cf. 1.9.6), alors $Ext^{r-1}_v(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \simeq Ext^{r-1}_{g_v}(M, \mathbb{Z})$ et $H^{3-r}_c(U, i_*\mathcal{F}) \simeq H^{3-r}(v, \mathcal{F}) = H^{3-r}(g_v, M)$ d'après 3.2.3(c), on trouve le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} Ext^r_U(i_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \times & H^{3-r}_c(U, i_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,. \\ \uparrow\simeq & & \| & & & & \| \\ Ext^{r-1}_{g_v}(M, \mathbb{Z}) & \times & H^{3-r}(g_v, M) & \longrightarrow & H^2(g_v, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Le exemple 2.1.4 dit que la deuxième ligne est un accouplement parfait de groupes finis, alors il en suit l'assertion. □

Remarque 3.3.6. Dans la démonstration, on a vu que $Ext^{r-1}_v(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} Ext^r_U(i_{v*}\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ pour tout r. En effet, de la même façon, on trouve un isomorphisme $Ext^{r-1}_Z(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} Ext^r_U(i_{Z*}\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ pour $i_Z : Z \to U$ une immersion fermée telle que $\eta \notin Z$.

Lemme 3.3.7. *Si $\mathcal{F} \in Fais(U)$ est constructible, alors $H^r_c(U, \mathcal{F})$ est fini pour tout r.*

Démonstration. Si K est un corps de nombres, on prend V un ouvert de U tel que $\mathcal{F}|V$ soit localement constant, et tel que $m\mathcal{F} = 0$ avec un certain m inversible sur V. On pose $i : Z = U \setminus V \to U$ et $j : V \to U$ les immersions associées, et on note $S = (X \setminus V) \bigsqcup S_\infty$. D'après 3.2.12, $H^r(V, \mathcal{F}|V) \simeq H^r(G_S, M)$ où $M = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$, c'est un groupe fini d'après 2.4.12. La proposition 3.2.3(a) dit que la différence entre $H^r(V, \mathcal{F}|V)$ et $H^r_c(V, \mathcal{F}|V)$ est au plus des groupes finis d'après 2.2.4 et 2.2.5. La proposition 3.2.3 dit aussi que la différence entre $H^r_c(V, \mathcal{F}|V)$ et $H^r_c(U, \mathcal{F})$ est au plus des groupes finis d'après 2.1.4. Alors $H^r_c(U, \mathcal{F})$ est fini pour tout r et tout $\mathcal{F} \in Fais(U)$ constructible.

Si K est un corps de fonctions de caractéristique p, d'après la même façon comme ci-dessus, il reste du cas où $\mathcal{F}$ est de p-torsion. Heureusement, il y a un résultat plus général. Maintenant, on pose $j : U \to X$, d'après la remarque 3.2.8 $H^r_c(U, \mathcal{F}) \simeq H^r(X, j_!\mathcal{F})$, on sait que $j_!\mathcal{F}$ est constructible (notant que $j_!\mathcal{F} \simeq j_! j^* j_* \mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $j_*\mathcal{F}$ (cf. 1.9.12(1,2) et 1.9.8(5))), alors [18, MilneEC VI.2.8][7] implique que $H^r(X, j_!\mathcal{F})$ est un groupe fini car X est propre. □

Lemme 3.3.8. *Soit* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux constructibles sur* $U_{ét}$*, alors si le théorème 3.3.1 est vrai pour deux entre les trois faisceaux* $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ *c'est aussi vrai pour le troisième faisceau.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & Ext^r_U(\mathcal{F}'', \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^r_U(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & Ext^r_U(\mathcal{F}', \mathbb{G}_m) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & H^{3-r}_c(U, \mathcal{F}'')^* & \longrightarrow & H^{3-r}_c(U, \mathcal{F})^* & \longrightarrow & H^{3-r}_c(U, \mathcal{F}')^* & \longrightarrow \cdots,
\end{array}$$

où la deuxième ligne reste exacte après prenant les duaux, parce que si le théorème 3.3.1 est vrai pour deux faisceaux entre les trois, tous les groupes sont finis. L'assertion est claire d'après le 5-lemme. □

Lemme 3.3.9. *Pour* $V \subseteq U$ *et* $\mathcal{F} \in Fais(U)$ *constructible, le théorème 3.3.1 est vrai pour* $(U, \mathcal{F})$ *si et seulement si c'est vrai pour* $(V, \mathcal{F}|V)$.

Démonstration. On pose $j : V \to U$ et $i : Z = U \setminus V \to U$ les immersions. Notant que $j^*\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$, d'après 1.10.7(a) on a $Ext^r_U(j_!(\mathcal{F}|V), \mathbb{G}_m) \simeq Ext^r_V(\mathcal{F}|V, \mathbb{G}_m)$. On sait que $H^r_c(U, j_!(\mathcal{F}|V)) \simeq H^r_c(V, \mathcal{F}|V)$ d'après 3.2.3(d),

[7] Le théorème [18, MilneEC VI.2.8] n'est pas vrai pour k général, par exemple, on prend $X = Spec(k)$ et $\mathcal{F} = \mu_p$ où $car(k) = p$ alors $H^1(X, \mathcal{F}) = H^1(Gal(k^s/k), \mu_p) = k^*/(k^*)^p$ qui n'est pas fini pour un certain k. Or dans notre cas, k est fini $Gal(k^s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$, alors si N est un module fini, $H^r(Gal(k^s/k), N)$ est fini pour $r = 0, 1$ (cf. [28, SerreCorpsLoc VIII.1]), $H^r(Gal(k^s/k), N)$ est nul pour les autre r car $scd(\widehat{\mathbb{Z}}) = 2$. Alors tous les termes de la suite spectrale de Hochschild-Serre dans la démonstration sont finis, la démonstration marche pour notre cas.

et aussi que $\alpha^r(U, j_!(\mathcal{F}|V)) = \alpha^r(V, \mathcal{F}|V)$ par fonctorialité. Alors le théorème 3.3.1 est vrai pour $(U, j_!(\mathcal{F}|V))$ si et seulement si c'est vrai pour $(V, \mathcal{F}|V)$. Le lemme 3.3.5 dit que le théorème 3.3.1 est toujours vrai pour $(U, i_*i^*\mathcal{F})$. La suite exacte $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$ (cf. 1.9.8(5)) se donne une suite de cohomologie, qui implique que le théorème 3.3.1 est vrai pour $(U, j_!(\mathcal{F}|V))$ si et seulement si c'est vrai pour $(U, \mathcal{F})$, la preuve est alors complète. □

Le lemme précédent dit qu'il suffit de montrer le théorème pour les faisceaux localement constants sur U assez petit.

Lemme 3.3.10. *Soit K' une extension finie galoisienne de K, et soit $\pi : U' \to U$ la normalisation de U dans K', alors*

(a)il existe une application canonique $N : \pi_*\mathbb{G}_{m,U'} \to \mathbb{G}_{m,U}$ qui s'appelle norme*,*

(b)pour $\mathcal{F} \in Fais(U')$ constructible, la composition

$$N_{Ext} : Ext^r_{U'}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}, \pi_*\mathbb{G}_m) \xrightarrow{N} Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. (a)Comme U est un schéma normal quasi-compact, tout morphisme $V \to U$ étale (de type fini)[8] est de la forme : V est un ouvert de la normalisation de U dans une certaine K-algèbre séparable L (i.e. L est un produit fini de extensions finies séparables de K) d'après 1.9.1.

On pose $V' = U' \times_U V$, alors $\pi' : V' \to V$ est fini, $V' \to U'$ est étale, alors V' est aussi normal et c'est la normalisation de V dans $K' \otimes_K L$. Par définition, on a $\Gamma(V, \pi_*\mathbb{G}_m) = \Gamma(V', \mathcal{O}^\times_{V'})$. Donc l'application norme $K' \otimes_K L \to L$ induit une application $\Gamma(V, \pi_*\mathbb{G}_m) \to \Gamma(V, \mathbb{G}_m)$ pour chaque $V \to U$ étale de type fini, qui défini l'application norme $N : \pi_*\mathbb{G}_{m,U'} \to \mathbb{G}_{m,U}$.

(b)Il existe $j : V \to U'$ une immersion ouverte telle que $\pi(V)$ soit ouvert dans U et $\pi|V : V \to \pi(V)$ soit un isomorphisme, alors $\pi|V : V \to U$ est étale. D'après [18, MilneEC V.1.13] on a un isomorphisme $Ext^r_V(j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*j_!j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$. On sait que $Ext^r_{U'}(j_!j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \simeq Ext^r_V(j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ d'après 1.10.7(a), on trouve alors la composition
$Ext^r_{U'}(j_!j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\simeq} Ext^r_U(\pi_*j_!j^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ est un isomorphisme, i.e. l'assertion (b) est vrai pour $j_!j^*\mathcal{F}$.

[8]Cette condition n'est pas très importante pour la définition du site $U_{\text{ét}}$ (cf. [34, Tamme II.1.5.2]).

Appliquant le 5-lemme à la suite de cohomologie associée à la suite $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$ avec $i : Z = U' \setminus V \to U'$ une immersion fermée (cf. 1.9.8(5)), on se ramène au cas où $\mathcal{F}$ est de la forme $i_*i^*\mathcal{F}$.

On a $Z = \coprod_{v \in U \setminus j(V)} Z_v$ où $i_{Z_v} : Z_v = \pi^{-1}(v) \to U'$ est l'immersion fermée associée (on remarque que $U \setminus j(V)$ est un ensemble fini dans notre cas). Alors $i_*i^*\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{v \in U \setminus j(V)} i_{Z_v *} i_{Z_v}^* \mathcal{F}$, alors on se ramène au cas où $U \setminus j(V) = \{v\}$, $Z = Z_v$ et $i = i_{Z_v}$. Maintenant on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[d, "\pi"] & Z \overset{i}{=} \pi^{-1}(v) = U' \times_U v \arrow[l] \arrow[d, "\pi_v"] \\ U & v \arrow[l, "i_v"] \end{tikzcd}$$

où π_v est un morphisme fini car $\pi : U' \to U$ l'est. On veut $Ext^r_{U'}(i_*i^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*i_*i^*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)$ étant un isomorphisme, notant que $\pi i = i_v \pi_v$ l'application ci-dessus s'identifie à l'application $Ext^{r-1}_Z(i^*\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \to Ext^r_v(\pi_{v*}i^*\mathcal{F}, \mathbb{Z})$ d'après la remarque 3.3.6. Parce que pour tout $v' \in Z$, $k(v')/k(v)$ est une extension finie séparable dans notre situation, le morphisme $\pi_v : Z \to v$ est étale, on applique [18, MilneEC V.1.13] pour π_v et trouve que l'application considérée est un isomorphisme. □

Lemme 3.3.11. *Les notations sont comme celles du lemme précédent, pour $\mathcal{F}' \in Fais(U')$ constructible, l'application $\alpha^r(U'.\mathcal{F})$ est un isomorphisme si et seulement si $\alpha^r(U, \pi_*\mathcal{F})$ l'est, le théorème 3.3.1 est vrai pour $(U', \mathcal{F})$ si et seulement si c'est vrai pour $(U, \pi_*\mathcal{F})$.*

Démonstration. Le lemme 3.3.10 se donne l'application norme $N : \pi_*\mathbb{G}_{m,U'} \to \mathbb{G}_{m,U}$ composant avec l'isomorphisme $H^3_c(U', \mathbb{G}_m) \simeq H^3_c(U, \pi_*\mathbb{G}_m)$ (cf. 3.2.3(e)) on obtient l'application $N_H : H^3_c(U', \mathbb{G}_m) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$ on a un diagramme commutatif d'après fonctorialité de la définition de H^r_c

$$\begin{tikzcd} Br(K'_w) \arrow[r] \arrow[d, "Nm"] & H^3_c(U', \mathbb{G}_m) \arrow[d, "N_H"] \\ Br(K_v) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \end{tikzcd}$$

pour tout $v \notin U$ et $w \mid v$. On sait que

$$\begin{tikzcd} Br(K'_w) \arrow[r, "inv"] \arrow[d, "Nm"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ Br(K_v) \arrow[r, "inv"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_c^3(U', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "N_H"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ H_c^3(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

d'après la démonstration de 3.2.9. Alors d'après le lemme 3.3.10(b) et la proposition 3.2.3(c), on a

$$\begin{tikzcd} Ext^r_{U'}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \arrow[d, "N_{Ext}"', "\simeq"] & \times & H_c^{3-r}(U', \mathcal{F}) \arrow[r] & H_c^3(U', \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "N_H"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ , \arrow[d, equal] \\ Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) & \times & H_c^{3-r}(U, \pi_*\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & H_c^3(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

qui identifie $\alpha^r(U', \mathcal{F})$ avec $\alpha^r(U, \pi_*\mathcal{F})$, les assertions sont alors claires. □

Remarque 3.3.12. Pour les lemmes 3.3.10 et 3.3.11, il suffit de supposer que K' est une extension finie séparable de K.

Lemme 3.3.13. *Soit $\mathcal{F} \in Fais(U)$ constructible.*
(a)On a $H_c^r(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $r \geqslant 4$.
(b)[9] *Si K n'a pas de places réelles, alors $Ext^r_U(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 4$.*

Démonstration. D'abord, on va se ramener au cas où U est assez petit tel que $\mathcal{F}|U$ soit localement constant et tel que $m\mathcal{F} = 0$ pour un certain entier m inversible sur U en cas de corps de nombres. Ensuite, on montrer les assertions (a) et (b) sous l'hypothèses ci-dessus. Enfin, on complète la preuve par un argument supplémentaire pour le cas de corps de fonctions.

Pour (a), la suite exacte de la proposition 3.2.3(d) avec le fait que $H^r(v, i_v^*\mathcal{F}) = 0$ pour v non-ramifiée et $r \geqslant 2$ car $cd(g_v) = 1$ (cf. 1.5.4) implique que $H_c^r(V, \mathcal{F}|V) \simeq H_c^r(U, \mathcal{F})$ pour $r \geqslant 3$, alors on peut supposer que U est petit etc..

Pour (b), on suppose que l'assertion (a) est déjà montrée, la proposition 3.2.3(a), le fait que $scd(Gal(K_v^s/K_v)) = 2$ et l'hypothèse K n'a pas de

[9]Dans [19, MilneADT II.3.12](b) l'assertion et la preuve sont seulement pour $r > 4$, mais dans la première ligne de la démonstration du lemme [19, MilneADT II.3.16], le cas $r = 4$ est appliqué. Dans la démonstration de (b), « $\mathcal{E}xt^r_U(F, \mathbb{G}_m) = 0$ for $r > 1$ (see the proof of 1.10a) », c'est vrai aussi pour $r \geqslant 1$ (comme l'argument de 1.10a) si K est un corps de nombres, mais ce n'est pas vrai pour $r = 1$ si K est un corps de fonctions, parce que dans 1.10a il y a l'hypothèse $pF = F$ si le corps est de caractéristique p. Alors la démonstration de [19, MilneADT] ne marche pas pour le cas $r = 4$ si K est un corps de fonctions. On se réfère à [5, Deninger1984] pour le cas de corps de fonction.

places réelles impliquent que $H^r(U,\mathcal{F}) = H^r_c(U,\mathcal{F}) \overset{(a)}{=} 0$ pour $r \geqslant 4$. Si $supp(\mathcal{F}) \subseteq Z$ avec $Z \subsetneq U$ un sous-schéma fermé de U, le lemme 3.3.5 dit que $Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) = H^{3-r}_c(U,\mathcal{F})^* = 0$ pour $r \geqslant 4$, où la dernière égalité est vrai d'après 3.2.3(a) et l'hypothèse K n'a pas de places réelles. En général, la suite exacte (cf. 1.9.8(5) posant $i : Z \to U$ et $j : V = U \setminus Z \to U$) $0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \to 0$ se donne une suite exacte $\cdots \to Ext^r_U(j_!j^*\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(i_*i^*\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \to \cdots$. On sait que $Ext^r_U(j_!j^*\mathcal{F},\mathbb{G}_m) = Ext^r_V(\mathcal{F}|V,\mathbb{G}_m)$ d'après la proposition 1.10.7(a) et $Ext^r_U(i_*i^*\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ car $supp(i_*i^*\mathcal{F}) \subseteq Z$ pour $r \geqslant 4$, alors si l'on peut montrer $Ext^r_V(\mathcal{F}|V,\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 4$, on a aussi $Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 4$. Donc on peut supposer que U est petit etc..

À partir de maintenant, on suppose que $\mathcal{F}$ est localement constant constructible sur U, et que $m\mathcal{F} = 0$ pour un certain m inversible sur U. On va montrer l'assertions (a) et (b) sous cette hypothèse avec un argument supplémentaire pour K un corps de fonctions de caractéristique p et $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant de p-torsion.

(a)D'après la proposition 3.2.3(a) on a besoin de montrer que $H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour $r \geqslant 3$ car $scd(Gal(K^s_v/K_v)) = 2$ pour v non-archimédienne. La proposition 3.2.12 identifie cette application avec l'application $H^r(G_S,M) \to \bigoplus_{v\in S^{\mathbb{R}}} H^r(K_v,M)$ où $M = \mathcal{F}_{\bar\eta}$ et $S = (X \setminus U)\bigsqcup S_\infty$. Le théorème 2.4.8(c) dit que c'est un isomorphisme pour $r \geqslant 3$.

Pour le cas supplémentaire[10], il n'y a pas de places archimédiennes. Notant que $scd(Gal(K^s_v/K_v)) = 2$ pour v non-archimédienne (cf. 1.5.4), on a $H^r_c(U,\mathcal{F}) = H^r(U,\mathcal{F})$ pour $r \geqslant 4$ d'après la proposition 3.2.3(a). Le lemme 3.3.14 suivant complète l'argument.

(b)Comme $\mathcal{F}$ est localement constant, on peut calculer les fibres de $\mathcal{E}xt^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ et trouve que c'est nul pour $r \geqslant 1$ d'après m-divisiblité (cf. la démonstration du corollaire 3.3.3). Comme $\mathcal{F}$ est tué par m, $\mathcal{E}xt^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ est toujours de torsion, c'est une limite inductive filtrante de faisceaux constructibles d'après la proposition 1.9.12(3), alors $H^r(U,\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)) = 0$ pour $r \geqslant 4$ d'après (a) (notant que l'hypothèse K n'a pas de places réelles implique que pour $r \geqslant 4$ on a $H^r(U,-) = H^r_c(U,-)$ d'après 3.2.3(a)). La suite spectrale 1.10.4 $H^r(U,\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow Ext^{r+s}_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ implique que $Ext^r_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ pour $r \geqslant 4$.

Pour le cas supplémentaire, $\mathcal{F}$ est de p-torsion, le lemme 3.3.14 suivant implique que $H^r(U,\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)) = 0$ pour $r \geqslant 3$ (un peu mieux que le cas ci-dessus). Par la même suite spectrale, il suffit de montrer que

[10]Dans la démonstration de [19, MilneADT II.3.12(a)], ce n'est pas très claire pourquoi on peut choisir $\pi : U' \to U$ dont le degré non-divisible par p.

$\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $s \geqslant 2$ (un peu pire que le cas ci-dessus). On sait que $\mathcal{E}xt^s_U(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)_{\bar{v}} = Ext^s(\mathcal{F}_{\bar{v}}, \mathbb{G}_{m\bar{v}})$ d'après 1.9.10, où $\mathcal{F}_{\bar{v}}$ est un p-groupe fini abélien. Par dévissage, on peut supposer que $\mathcal{F}_{\bar{v}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, $Ext^s(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_{m\bar{v}}) = 0$ pour $s \geqslant 1$, la suite de cohomologie de $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ implique que $Ext^s(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_{m\bar{v}}) = 0$ pour $s \geqslant 2$, qui complète l'argument. □

Lemme 3.3.14. *Soit U un schéma affine de type fini sur k un corps fini de caractéristique p, alors $cd_p(U_{ét}) \leqslant dim(U) + 1$.*

Démonstration. On sait que $cd(Gal(k^s/k)) = 1$ (cf. 1.5.4), et que $cd(\bar{U}) \leqslant dim(\bar{U}) = dim(U) = 1$ où $\bar{U} = U \times_k k^s$ (cf. [10, SGA4 XIV.3.2]). La suite spectrale de Hochschild-Serre 1.10.3(notant que $Aut_U\bar{U} = Gal(k^s/k)$) $H^r(Gal(k^s/k), H^s(\bar{U}, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{r+s}(U, \mathcal{F})$ implique que $H^r(U, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $r \geqslant dim(U) + 2$ et $\mathcal{F}$ de torsion. □

Remarque 3.3.15. En effet, le même argument a montré l'assertion : $cd_l(U) \leqslant dim(U) + cd_l(Gal(k^s/k))$ pour U un schéma affine de type fini sur un corps k. Si k est un corps de caractéristique $p = l$, on a $cd_p(Gal(k^s/k)) \leqslant 1$ d'après [31, SerreCohGal II.2.2]. alors $cd_p(U) \leqslant dim(U) + 1$. Si U n'est pas affine, c'est aussi vrai (cf. [18, MilneEC VI.1.5(b)]).

Lemme 3.3.16. *Suppose que $\alpha^r(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout r, n lorsque K n'a pas de places réelles, alors le théorème 3.3.1 est vrai.*

Démonstration. Premièrement, la finitude de groupes est donnée par le lemme 3.3.7.

On sait maintenant, lorsque K n'a pas de places réelles, le théorème 3.3.1 est vrai pour les faisceaux constants constructibles sur X, alors c'est vrai pour les faiseceaux constants constructibles sur U pour tout U d'après le lemme 3.3.9.

Le lemme 3.3.9 dit qu'il suffit de montrer que le théorème d'Artin-Verdier 3.3.1 pour $\mathcal{F}$ localement constant constructible sur U, à partir de maintenant à la fin de la démonstration on travaille avec cette hypothèse. On le verra par faire récurrence en r. Le lemme 3.3.13 dit que $\alpha^r(U, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour $r << 0$. On suppose que $\alpha^r(U, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour $r < r_0$ et pour tout U et tout faisceau constructible, on va montrer que $\alpha^{r_0}(U, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour un U fixé et $\mathcal{F}$ localement constant sur U.

Il existe un revêtement fini étale $\pi : U' \to U$ tel que $\mathcal{F}|U'$ soit constant (cf. 1.9.5, on remarque que ce ne marche pas généralement pour les faisceaux localement constants) Alors U' est la normalisation de U dans K' une extension finie séparable de K d'après 1.9.1, de plus, si K est un corps de nombres, on peut supposer aussi que $m\mathcal{F} = 0$ pour un certain m inversible sur U alors remplaçant K' par $K'' = K'(\mu_m)$ ($K'' = K'(\mu_4)$ si $m = 2$) et U' par U'' sa normalisation dans K'' ($U'' \to U'$ est alors non-ramifié, étale) on peut supposer que K' est totalement imaginaire, remplaçant K' par sa clôture galoisienne (les places dans U restent non-ramifiées) on suppose aussi que K'/K est galoisienne. On pose $\mathcal{F}_* = \pi_*\pi^*\mathcal{F} \in Fais(U)$, comme π est un morphisme fini étale, l'application trace (cf. [18, MilneEC V.1.12]) $tr : \mathcal{F}_* \to \mathcal{F}$ est surjective (on le voit par les fibres), on note $\mathcal{F}' = ker(tr)$ et trouve un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
Ext_U^{r_0-1}(\mathcal{F}_*, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0-1}(U,\mathcal{F}_*)", "\simeq"'] & Ext_U^{r_0-1}(\mathcal{F}', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0-1}(U,\mathcal{F}')", "\simeq"'] & Ext_U^{r_0}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(U,\mathcal{F})"] & Ext_U^{r_0}(\mathcal{F}_*, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(U,\mathcal{F}_*)", "\simeq"'] & Ext_U^{r_0}(\mathcal{F}', \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\alpha^{r_0}(U,\mathcal{F}')"] \\
H_c^{4-r_0}(U, \mathcal{F}_*)^* \arrow[r] & H_c^{4-r_0}(U, \mathcal{F}')^* \arrow[r] & H_c^{3-r_0}(U, \mathcal{F})^* \arrow[r] & H_c^{3-r_0}(U, \mathcal{F}_*)^* \arrow[r] & H_c^{3-r_0}(U, \mathcal{F}')^*
\end{tikzcd}$$

où $\alpha^{r_0-1}(U, \mathcal{F}_*)$ et $\alpha^{r_0-1}(U, \mathcal{F}')$ sont deux isomorphismes d'après l'hypothèse de récurrence. On sait que $\pi^*\mathcal{F} \in Fais(U')$ est un faisceau constant, alors $\alpha^{r_0}(U', \pi^*\mathcal{F})$ est un isomorphisme d'après la discussion au début de cette démonstration, alors $\alpha^{r_0}(U, \mathcal{F}_*)$ est aussi un isomorphisme d'après le lemme 3.3.11. On a tout de suite $\alpha^{r_0}(U, \mathcal{F})$ est injective pour tout $\mathcal{F}$ localement constant sur U. Notant que $\mathcal{F}'$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}_* = \pi_*\pi^*\mathcal{F}$, $\pi^*\mathcal{F}'$ est un sous-faisceau de $\pi^*\pi_*\pi^*\mathcal{F}$ qui est constant, i.e. $\mathcal{F}'$ est localement constant, alors $\alpha^{r_0}(U, \mathcal{F}')$ est injective, on trouve donc le fait que $\alpha^{r_0}(U, \mathcal{F})$ est un isomorphisme. □

Le lemme précédent 3.3.16 dit qu'il suffit de montrer le théorème d'Artin-Verdier 3.3.1 supposant que K n'a pas de places réelles. À partir de maintenant, on travaille avec cette hypothèse.

Pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$, on définit $\beta^r(U, \mathcal{F}) : H_c^r(U, \mathcal{F}) \to Ext_U^{3-r}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)^*$ le dual de l'application $\alpha^{3-r}(U, \mathcal{F}) : Ext_U^{3-r}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m) \to H_c^r(U, \mathcal{F})^*$.

Lemme 3.3.17. *(a)Suppose que $r_0 \geqslant 1$, si pour tout K, tout $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible et tout $r < r_0$, $\beta^r(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme, alors $\beta^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est injective.*

(b)Suppose que pour tout K, tout $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible et tout $r < r_0$, $\beta^r(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme, de plus, suppose que $\beta^{r_0}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme lorsque $\mu_m(K) = \mu_m(K^s)$, alors $\beta^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout X et tout $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible.

Démonstration. Comme K n'a pas de places réelles, on a $H_c^r(X, \mathcal{F}) \simeq H^r(X, \mathcal{F})$ d'après la proposition 3.2.3(a).

(a)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible, on fixe $c \in H^{r_0}(X, \mathcal{F})$, il existe une injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ avec $\mathcal{I} \in Fais(X)$ flasque[11] de torsion (cf. [18, MilneEC III.1.9(c)]). D'après 1.9.12(3) $\mathcal{I}$ est une limite inductive filtrante de faisceaux constructibles. Comme $\mathcal{I}$ est flasque et $r_0 \geqslant 1$, $H^{r_0}(X, \mathcal{I}) = 0$. D'après la proposition 1.10.1, il existe $\mathcal{F}_* \in Fais(X)$ constructible tel que $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_*$ et tel que c soit envoyé sur 0 dans $H^{r_0}(X, \mathcal{F}_*)$, on pose $\mathcal{Q} = coker(\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_*)$. On a alors un diagramme commutatif avec lignes exactes (la deuxième ligne est exacte car les faisceaux considérés sont constructibles, alors tués par un certain entier, tous les Ext sont alors de torsion, la ligne reste exacte après $-^*$)

$$\begin{tikzcd}
H^{r_0-1}(X, \mathcal{F}_*) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{F}_*)", "\simeq"'] & H^{r_0-1}(X, \mathcal{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{Q})", "\simeq"'] & H^{r_0}(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0}(X,\mathcal{F})"] & H^{r_0}(X, \mathcal{F}_*) \arrow[d, "\beta^{r_0}(X,\mathcal{F}_*)"] \\
Ext_X^{4-r_0}(\mathcal{F}_*, \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{4-r_0}(\mathcal{Q}, \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{3-r_0}(\mathcal{F}, \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{3-r_0}(\mathcal{F}_*, \mathbb{G}_m)^*
\end{tikzcd}$$

où les premières deux applications verticales sont des isomorphismes par l'hypothèse. Notant que $c \mapsto 0 \in H^{r_0}(X, \mathcal{F}_*)$, c'est facile de vérifier que si $\beta^{r_0}(X, \mathcal{F})(c) = 0$ alors $c = 0$, i.e. $\beta^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est injective.

(b)Pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible, il existe U un ouvert de X et K' une extension finie galoisienne de K tel que la normalisation $U' \to U$ de U dans K' soit étale, $\mathcal{F}|U'$ est constant et $\mu_m(K) = \mu_m(K^s)$ pour un certain m satisfaisant $m\mathcal{F} = 0$. On pose X' la normalisation de X dans K', on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "\pi"] & U' \arrow[l, hook', "j_0"'] \arrow[d, "\pi_0 = \pi|U'"] \\
X & U, \arrow[l, hook', "j"']
\end{tikzcd}$$

où les normalisations π, π_0 sont morphismes finis d'après [18, MilneEC I.1.1], j et j_0 sont immersions ouvertes, on pose aussi $i : Z = X \setminus U \to X$ l'immersion fermée associée. Comme $\mathcal{F}|U'$ est constant, $\mathcal{F}_1 = j_{*0}(\mathcal{F}|U')$ est le faisceau constant associé au groupe abélien $\Gamma(U', \mathcal{F})$ (on peut le voir d'après l'identification de [18, MilneEC II.3.16]). L'application $\mathcal{F}|U \to \pi_{0*}\pi_0^*(\mathcal{F}|U) = \pi_{0*}(\mathcal{F}|U')$ induit une application $\mathcal{F} \to \pi_*\mathcal{F}_1$ car (j^*, j_*) est une paire adjointe. On vérifie que $supp(ker(\mathcal{F} \to \pi_*\mathcal{F}_1)) \subseteq Z$ et $supp(ker(\mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F})) \subseteq U$, alors on obtient une injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_* = \pi_*\mathcal{F}_1 \oplus i_*i^*\mathcal{F}$ dans $Fais(X)$, on note son co-noyau $\mathcal{G}$. On trouve un diagramme commutatif avec lignes exactes

[11] Ici le mot *flasque* réfère au mot *flabby* dans [18, MilneEC III.1.9(c)], c'est un peu différent de la définition de flasque dans [10, SGA4].

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{r_0-1}(X,\mathcal{F}_*) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{F}_*)", "\simeq"'] & H^{r_0-1}(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{G})", "\simeq"'] & H^{r_0}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0}(X,\mathcal{F})"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & Ext_X^{4-r_0}(\mathcal{F}_*,\mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{4-r_0}(\mathcal{G},\mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{3-r_0}(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^{r_0}(X,\mathcal{F}_*) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0}(X,\mathcal{F}_*)", "\simeq"'] & H^{r_0}(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{r_0}(X,\mathcal{G})"] & \cdots \\
{} \arrow[r] & Ext_X^{3-r_0}(\mathcal{F}_*,\mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{3-r_0}(\mathcal{G},\mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

où $\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{F}_*)$ et $\beta^{r_0-1}(X,\mathcal{G})$ sont des isomorphismes par l'hypothèse, on va expliquer que $\beta^{r_0}(X,\mathcal{F}_*)$ est aussi un isomorphisme. En effet, on sait que $\beta^{r_0}(X,i_*i^*\mathcal{F})$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.3.5, $\beta^{r_0}(X',\mathcal{F}_1)$ est un isomorphisme d'après l'hypothèse, alors $\beta^{r_0}(X,\pi_*\mathcal{F}_1)$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.3.11, alors $\beta^{r_0}(X,\mathcal{F}_*)$ est aussi un isomorphisme. Maintenant, du diagramme ci-dessus on trouve que $\beta^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est injective pour tout $\mathcal{F}$ constructible, alors $\beta^{r_0}(X,\mathcal{G})$ est aussi injective, on trouve finalement que $\beta^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme. □

Lemme 3.3.18. *Le théorème 3.3.1 est vrai pour $\mathcal{F} \in Fais(X)$ constructible, alors c'est aussi vrai en tout cas.*

Démonstration. La finitude des groupes considérés ont été donnée par le lemme 3.3.7. Si le théorème 3.3.1 est vrai pour X, pour $\mathcal{F} \in Fais(U)$ constructible, la démonstration du lemme 3.3.9 identifie l'application $\alpha^r(U,\mathcal{F})$ avec $\alpha^r(X,j_!\mathcal{F})$, on sait que $j_!\mathcal{F}$ est aussi constructible (cf. la démonstration du lemme 3.3.7), alors le théorème 3.3.1 est vrai pour $(U,\mathcal{F})$.

On remarque que comme X n'a pas de places réelles, $H^r_c(X,\mathcal{F}) \simeq H^r(X,\mathcal{F})$ d'après 3.2.3(a) (mais $H^r_c(U,\mathcal{F}) \neq H^r(U,\mathcal{F})$ si $U \subsetneq X$).

Maintenant, on va montrer que $\beta^r(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme par récurrence en r. Pour $r \leqslant -1$ et $r \geqslant 4$, $\beta^r(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.3.13. La suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ se donne une suite de cohomologie

$$\cdots \to Ext^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \to Ext^r_X(\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) = H^r(X,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{m}$$
$$Ext^r_X(\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) = H^r(X,\mathbb{G}_m) \to \cdots .$$

On sait que $H^0_c(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H^0(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et la remarque 3.2.2(b) implique que $Ext^3_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) = \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, l'accouplement est celui évident, alors $\beta^0(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Alors $\beta^0(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.3.17(b), donc $\beta^1(X,\mathcal{F})$ est une injection d'après le lemme 3.3.17(a). On sait que $H^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H^1(G_{S_\infty}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = Hom_{cts}(G_{S_\infty}^{ab}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, où $G_{S_\infty} = Gal(K_{S_\infty}/K)$ avec K_{S_∞} l'extension maximale de K non-ramifiée en dehors S_∞. La première égalité vient du même argument que la preuve de 3.2.12, pour le cas $r = 1$ on n'a pas besoin de l'hypothèse m inversible sur X affine. D'après la théorie du corps de classes global 1.4.2 on a $G_{S_\infty}^{ab} = Gal(H(K)/K) \simeq Cl(K)$ car K n'a pas de places réelles. Alors $[H^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = [(Cl(K)^{(m)})^*] = [Cl(K)^{(m)}] = [Ext_X^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)]$, où dernière égalité vient de la suite de Ext_X^r ci-dessus et 3.2.1, 3.2.2(b). On remarque que cette égalité marche aussi pour un corps de fonctions, car $Gal(H(K)/K) \simeq \widehat{Pic(X)} \simeq Pic^0(X) \times \widehat{\mathbb{Z}}$ et alors $\widehat{Pic(X)}^{(m)} \simeq Pic(X)^{(m)}$ est un groupe fini. Alors on trouve que $\beta^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, on a $\beta^1(X, \mathcal{F})$ aussi un isomorphisme d'après 3.3.17(b), ensuite $\beta^2(X, \mathcal{F})$ est une injection d'après 3.3.17(a).

Afin de compléter la preuve, d'après 3.3.17, il suffit de montrer que $\beta^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $r = 2, 3$ supposant que K n'a pas de places réelles et contient toutes les racines m^{ime} d'unité.

Premièrement, on suppose que m est non-divisible par $car(K)$. Il existe un ouvert affine U de X tel que m soit inversible sur U, on pose $i : Z = X \setminus U \to X$, on a le diagramme commutatif associé à la suite exacte $0 \to j_! j^* \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F} \to 0$ (cf. 1.9.8(5))

$$\begin{tikzcd}
 & H_c^r(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] & H^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] & H^r(X, i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \arrow[d, equal] & \\
{} \arrow[r] & H_c^r(X, j_!\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^r(X, j_!(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))=\beta^r(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"'] & H_c^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"] & H_c^r(X, i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^r(X, i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))"] & {} \\
{} \arrow[r] & Ext_X^{3-r}(j_!(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & Ext_X^{3-r}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & Ext_X^{3-r}(i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \mathbb{G}_m)^* \arrow[r] & {} \\
 & Ext_U^{3-r}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) & & &
\end{tikzcd}$$

où toutes les égalité vient de 3.2.3(a,d) et 1.10.7(a).

On a vu que $\beta^r(X, j_!(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) = \beta^r(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $r \leqslant 1$ et $r \geqslant 4$, et c'est une injection pour $r = 2$. L'application $\beta^r(X, i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ est toujours un isomorphisme d'après le lemme 3.3.5.

L'application $\beta^3(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ vient de l'accouplement

$$Hom_U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \times H_c^3(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H_c^3(U, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

or dans notre cas $K \supseteq \mu_m$ alors $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mu_m \in Fais(U)$, on a donc $H_c^3(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq H_c^3(U, \mu_m)$. La suite de Kummer $0 \to \mu_m \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{m} \mathbb{G}_m \to$

0 (cf. 1.9.3) se donne le fait que $H_c^3(U, \mu_m) = \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = H_c^3(U, \mathbb{G}_m)$ d'après 3.2.3(b) et 3.2.9. Alors $\beta^3(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Maintenant $\mu_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^D = \mathcal{H}om_U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$, $H_c^r(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $H^{3-r}(U, \mu_m)$ sont duaux sauf que $r = 2$ d'après le corollaire 3.3.3, alors la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré se donne une égalité $[H_c^2(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = [H^1(U, \mu_m)]$ (cf. la remarque 3.2.18). Donc la injection $\beta^2(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

D'après le diagramme ci-dessus, on trouve que $\beta^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $r = 2, 3$.

Il reste seulement le cas où K est un corps de fonctions de caractéristique p et $\mathcal{F}$ constant de p-torsion sur $X_{\text{ét}}$, par dévissage on se ramène au faisceau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On considère la suite d'Artin-Schreier (cf. 1.9.3) $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \to 0$. On sait que $H^r(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X) \simeq H^r(X_{Zar}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $r \geqslant dim(X) + 1 = 2$ d'après [18, MilneEC III.3.7] et [13, Hartshorne III.2.7], alors la suite de cohomologie implique $H_c^r(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^r(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $r \geqslant 3$. Notant que $Hom_X(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) = \mathcal{O}_X(X)^\times = \mathbb{F}_q^*$ avec q une puissance de p car X est un schéma propre. L'application $p : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*$ est injective, alors $Ext_X^{3-r}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geqslant 3$. Alors d'après les discussions ci-dessus, $\beta^r(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un isomorphisme sauf que $r = 2$, c'est une injection pour $r = 2$. Le lemme suivant 3.3.19 complète la preuve. □

Lemme 3.3.19. *Soit X est une courbe projective sur $\mathbb{F}_q$ avec q une puissance de p, alors les groupes $H^2(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $Ext_X^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ sont finis de même ordre.*

Démonstration. On a déjà vu dans la démonstration du lemme précédent que $[H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})] = [Pic(X)^{(p)}]$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Comme X est projective, les groupe $H^r(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X) \simeq H^r(X_{Zar}, \mathcal{O}_X)$ sont finis (cf. [13, Hartshorne III.5.2]). La suite d'Artin-Schreier $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \to 0$ se donne une suite de cohomologie de groupes finis jusqu'à $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, d'où $p \cdot [H^2(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})] = [H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})]$.

Notant que $p : \mathcal{O}_X(X)^\times = \mathbb{F}_q^* \to \mathcal{O}_X(X)^\times = \mathbb{F}_q^*$ est surjective, la suite de Ext_X^r de $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ se donne un isomorphisme $Ext_X^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \simeq Ext_X^1(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)_p = H^1(X, \mathbb{G}_m)_p$. D'après 3.2.1 $H^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq Pic(X)$. On applique multiplication par p à la suite $0 \to Pic^0(X) \to Pic(X) \to \mathbb{Z} \to 0$, le lemme du serpent se donne une suite exacte de groupes finis (car $Pic(X)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$), d'où $p \cdot [Pic(X)_p] = [Pic(X)^{(p)}]$. L'assertion est claire d'après ces égalités. □

Bibliographie

[1] E. Artin and J. Tate. *Class Field Theory.* Harvard University, 1961.

[2] M. Atiyah and I. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[3] A. Brumer. Pseudocompact algebras, profinite groups, and class formations. *J.Algebra*, 4 :442–470, 1966.

[4] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic Number Theory.* Academic Press, 1967.

[5] C. Deninger. On Artin-Verdier duality for function fields. *Math. Z.*, 188 :91–100, 1984.

[6] C. Deninger. An extension of Artin-Verdier duality to non-torsion sheaves. *J. Reine Angew. Math.*, 366 :18–31, 1986.

[7] M. Greenberg. Rational points in henselian discrete valuation rings. *Publ. Math. I.H.E.S*, 31 :59–64, 1966.

[8] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math.*, pages 119–221, 1957.

[9] A. Grothendieck. *Revêtements Étales et Groupe Fondamental, SGA1.* Lecture Notes in Math. 224. Springer-Verlag, 1971.

[10] A. Grothendieck, M. Artin, and J.L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas.* Lecture Notes in Math. 269, 270, 305. Springer-Verlag, 1972-1973.

[11] K. Haberland. *Galois Cohomology of Algebraic Number Fields.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.

[12] D. Harari and T. Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. Reine Angew. Math.*, 578 :93–128, 2005.

[13] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Math. 52. Springer-Verlag, 1977.

[14] B. Y. Kazarnovskii. Proof of a theorem of Tate. *Russ. Math. Surveys*, 27 :56–68, 1972.

[15] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2002.

[16] H. Matsumura. *Commutative Algebra.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, second edition, 1980.

[17] B. Mazur. Notes on étale cohomology of number fields. 6 :521–552, 1973.

[18] J.S. Milne. *Étale Cohomology.* Princeton University Press, 1980.

[19] J.S. Milne. *Arithmetic Duality Theorems.* BookSurge, LLC, second edition, 2006.

[20] M. Nagata. A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 :89–102, 1963.

[21] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory.* Springer, 1999.

[22] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg. *Cohomology of Number Fields.* Springer-Verlag, first edition, 2000.

[23] F. Oort. *Commutative Group Schemes.* Lecture Notes in Math. 15. Springer, 1966.

[24] V.P. Platonov and A.S. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory.* Academic Press, 1994.

[25] D. Ramakrishnan and R.J. Valenza. *Fourier Analysis on Number Fields.* Springer-Verlag, 1999.

[26] A. Schmidt. Errata for : Cohomology of Number Fields. It is available from the website http ://www.mathematik.uni-regensburg.de/Schmidt/papers/schmidt11-en.html.

[27] J.-P. Serre. Local class field theory. In Cassels and Fröhlich [4], pages 129–162.

[28] J.-P. Serre. *Corps Locaux.* Hermann, fourth edition, 1968.

[29] J.-P. Serre. *Algebraic Groups and Class Fields.* Graduate Texts in Math. 117. Springer-Verlag, translated edition, 1975.

[30] J.-P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups.* Graduate Texts in Math. 42. Springer-Verlag, 1977.

[31] J.-P. Serre. *Cohomologie Galoisienne.* Lecture Notes in Mathematics. 5. Springer, 1997.

[32] S. Shatz. *Profinite Groups, Arithmetic, and Geometry.* Princeton University Press, 1972.

[33] R. Swan. Induced representations and projective modules. *Ann. of Math.*, 71 :552–578, 1960.

[34] G. Tamme. *Introduction to Etale Cohomology.* Springer-Verlag, 1994.

[35] J. Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. *Proc. Intern. Congress Math.*, pages 288–295, 1962.

[36] J. Tate. Global class field theory. In Cassels and Fröhlich [4], pages 163–203.

[37] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes.* Graduate Texts in Math. 66. Springer-Verlag, 1979.