

André

Resumé

PM101A12 Ex 1:

DM BMS

1/	P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
	V	V	V	V	V
	V	F	V	F	F
	F	V	V	F	F
	F	F	F	F	V

2/	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
	V	V	V	V	V
	V	F	F	V	V
	F	V	V	F	V
	F	F	V	V	V

3/	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
	V	V	V
	V	F	F
	F	V	F
	F	F	V

$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$ ont la même table de vérité, donc elles sont équivalentes.

4/4

Ex 2:

1/ f admet un maximum si: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2/ f n'admet pas de minimum si: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

3/ Montrons par l'absurde que $P: \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est vraie pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $\neg P: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ est vraie.

Or, quelque soit y , si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y) \Rightarrow$ Contradiction
 Ainsi P est toujours vraie.

4/4

Ex 3:

1. Posons $P(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

• Initialisation: $n=1 \quad \sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1$

$\Rightarrow P(1)$ est vraie.

• Hérité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie, où:

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n+1 \stackrel{H.R.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

• Ainsi $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Posons $P(n): \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

• Initialisation: $n=1 \quad \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1$

$\Rightarrow P(1)$ est vraie.

• Hérité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie, où:

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2 + 2n(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2 + 2n^2(n+1) + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 n^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

fini $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4/4

Ex 4:

$$x-1+|x-2| \geq |2x+4|$$

$$\rightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2, \text{ donc } \begin{cases} |x-2| = x-2 & \text{sur } [2; +\infty[\\ |x-2| = -x+2 & \text{sur }]-\infty; 2] \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2, \text{ donc } \begin{cases} |2x+4| = 2x+4 & \text{sur } [-2; +\infty[\\ |2x+4| = -2x-4 & \text{sur }]-\infty; -2] \end{cases}$$

$\rightarrow$ sur $]-\infty; -2]$, on a:

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq -2,5$$

Les solutions sont les éléments de $[-2,5; -2]$.

$\rightarrow$ sur $[-2; 2]$, on a:

$$x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$-1,5 \geq x$$

Les solutions sont les éléments de $[-2; -1,5]$.

$\rightarrow$ sur $[2; +\infty[$, on a:

$$x-1+x-2 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 4 \rightarrow \text{faux}$$

Il n'y a aucune solution sur $[2; +\infty[$.

$\Rightarrow$ Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation sur $\mathbb{R}$ est $[-2,5; -1,5]$.

4/4

Ex 5:

$$\begin{aligned} 1/ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -2x \quad \quad \quad 2-4 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -2x \quad \quad \quad 2-4 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad (\Rightarrow) x = 2 \\ \begin{cases} 7x \quad \quad -z = 11 \\ -2x \quad \quad \quad = -4 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad (\Rightarrow) 7 \times 2 - z = 11 \quad (\Rightarrow) z = 3 \\ \begin{cases} 7x \quad \quad -z = 11 \\ -2x \quad \quad \quad = -4 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad (\Rightarrow) 7 \times 2 - z = 11 \quad (\Rightarrow) z = 3 \\ \begin{cases} 7x \quad \quad -z = 11 \\ -2x \quad \quad \quad = -4 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} & \quad (\Rightarrow) -3 \times 2 + y - 3 = -9 \quad (\Rightarrow) y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2/ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -5x \quad \quad +z = -5 \end{cases} & \quad L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -20y+14z = 42 \\ -5x \quad \quad +z = -5 \end{cases} & \quad L_3 \rightarrow L_3 + 5L_1 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -20y+14z = 42 \\ -5x \quad \quad +z = -5 \end{cases} & \quad L_3 \rightarrow L_3 + 5L_1 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -20y+14z = 42 \\ -24z = -40 \end{cases} & \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -20y+14z = 42 \\ 0 = 2 \end{cases} & \quad \Rightarrow \text{Pas de solution} \end{aligned}$$

Ainsi le système n'a pas de solution.