

Exercice n°1:(1) V: Vrai
F: Faux

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F

(2) V: Vrai
F: Faux

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F

4/4

(3) La proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est la même que la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
Les propositions $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont la même table de vérité, elles sont donc équivalentes.

Exercice n°2:(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$ (2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$ $f(x) > f(y)$

(3) Soit y appartenant à $\mathbb{R}$, on choisit $x = y$ ainsi cette proposition est toujours vraie.

3/4Exercice n°3:(1) $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ On vérifie que la propriété est vraie au rang 1.

Au rang 1: $\sum_{k=1}^1 k = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

La propriété est vraie au rang 1. On suppose qu'elle est vraie pour tout rang m . ????

On essaie de prouver qu'elle est vraie au rang $m+1$.

$$\frac{(m+1)(m+1+1)}{2} = \frac{m(m+1) + m + m + 1 + 1}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2m}{2} + \frac{2}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^m k + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{m(m+1) + 2m + 2}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

On a donc $\sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire. Par récurrence la propriété est vraie au rang m .

(2) $\sum_{k=1}^m k^3 = \left(\sum_{k=1}^m k\right)^2$ On vérifie que la propriété est vraie au rang 1.

Au rang 1: $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^1 k\right)^2 = 1^2 = 1$

La propriété est donc vraie au rang 1. On suppose qu'elle est vraie peut-être au rang m .

On essaie de prouver qu'elle est vraie au rang $m+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^m k\right)^2 + (m+1)^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 \\ &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\ &= \frac{(m^2+m)^2}{4} + \frac{(4m^3 + 12m^2 + 12m + 4)}{4} \\ &= \frac{m^4 + 2m^3 + m^2 + 4m^3 + 12m^2 + 12m + 4}{4} = \frac{m^4 + 6m^3 + 13m^2 + 12m + 4}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right)^2 &= \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2 = \frac{(m^2 + 2m + m + 2)^2}{4} \\ &= \frac{(m^2 + 2m + m + 2)(m^2 + 2m + m + 2)}{4} \\ &= \frac{m^4 + 2m^3 + m^3 + 2m^2 + 2m^3 + 4m^2 + 2m^2 + 4m + m^3 + 2m^2 + m^2 + 2m + 2m^2 + 4m + 2m + 4}{4} \\ &= \frac{m^4 + 6m^3 + 13m^2 + 12m + 4}{4} \end{aligned}$$

On a bien $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right)^2$.

La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire. Par récurrence la propriété est vraie au rang m .

3/4

Exercice n°4:

$$x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4|$$

$$|x - 2| = x - 2 \text{ si } x \geq 2$$

$$|x - 2| = -x + 2 \text{ si } x < 2$$

$$|2x + 4| = 2x + 4 \text{ si } x \geq -2$$

$$|2x + 4| = -2x - 4 \text{ si } x < -2$$

$$\begin{aligned} \text{si } x < -2: & x-1-x+2 \geq -2x-4 \\ \Leftrightarrow & x-1-x+2+2x+4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2x+5 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x \geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } -2 \leq x < 2: & x-1-x+2 \geq 2x+4 \\ \Leftrightarrow & x-1-x+2-2x-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -2x-3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x \leq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } x > 2: & x-1+x-2 \geq 2x+4 \\ \Leftrightarrow & x-1+x-2-2x-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -7 \geq 0 \end{aligned} \quad \Delta \text{ Faux} \quad S = \{\emptyset\} \text{????}$$

L'ensemble de solutions est: $\left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right\} \text{????} \quad 2/4$

Exercice n°5:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \quad L_2 - 4L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \quad L_3 + 3L_1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 7y-10z = -30 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \times 7 \\ L_3 \times 10 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -70y+98z = 294 \\ 70y-100z = -300 \end{cases} \quad L_3 + L_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -70y+98z = 294 \\ -2z = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8 \\ y = -8,4 \\ z = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble de solution est $\{(0,8; -8,4; -3)\}$. ????

$$(1) \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -5x \quad +7 = -5 \end{cases} \quad L_2 - 4L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ -5x \quad +z = -5 \end{cases} \quad L_3 + 5L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 10y-14z = -40 \end{cases} \quad \text{On obtient un système qui n'a pas de solution.}$$

L'ensemble de solutions est $\{\emptyset\}$. $\emptyset$

3/4