

1|2|3|4 |5
4|3|4|3.5|4

18.5/20

DM: Mathématiques :

Maelie
CHAN PENG

Exercice 1:

1) On dresse la table de vérité correspondante :
 $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2) On procède de la même manière : $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3) On en déduit la table suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$1 \Leftrightarrow 2$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

Les tables de vérité
sont égales.

↳ On peut en déduire qu'elles
sont équivalentes.

Exercice 2:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

(1) Une proposition logique de "f admet un maximum" pourrait être exprimée ainsi:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

(2) "f n'admet pas de minimum":

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

(3) Proposition: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est toujours vraie.
Posons (1), la négation de la proposition initiale:

$$(1) \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

Posons $f: x \mapsto x$

Prendons $x = y$.

$$f(x) > f(y) \text{ est alors absurde.}$$

Ainsi on en déduit que la proposition est vraie.

3/4

Exercice 3:

(1) Récurrence:

Soit $P(n)$ la proposition " $P(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ " pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

I. Pour $n=1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
 P_1 est vraie.

H: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie. On calcule alors $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ avec } P_n \text{ vraie.}$$

$$\text{Puis } \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\text{On calcule ensuite : } \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\text{On obtient bien } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

$P(n+1)$ est vraie.

C. On a montré que $P(1)$ est vraie et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie. Donc $P(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$$2) \text{ Récurrence : } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Soit $P(n)$ la proposition " $P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$ " pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$$\text{I. Pour } n=1 : \sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2$$

H. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie.

On calcule alors $P(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \text{ avec } P(n) \text{ vraie.}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \text{ peut s'écrire } \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \text{ d'après la première récurrence.}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &\Leftrightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 + (n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4(n+1))}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4)}{4} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \end{aligned}$$

On obtient bien $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$. $P(n+1)$ est vraie.

C. On a montré que $P(1)$ est vraie et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie, donc $P(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$. 4/4

Exercice 4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$

Plusieurs cas: • Si $x \geq 2$ $x-2 \geq 0$ et $2x+4 \geq 0$.

$$\Rightarrow x-1 + x-2 \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow -3 \geq 4$$

Absurde !

• Si $x \leq -2$ $(2x+4) \leq 0$

$$|2x+4| = -(2x+4)$$

$$|x-2| = -(x-2)$$

$$\Rightarrow x - 1 - x + 2 \geq -2x - 4$$

$$\Rightarrow 2x + 1 \geq -4$$

$$\Rightarrow 2x \geq -5$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} \leq -2$$

Possible

• Si $-2 < x \leq 2$:

$$(x-2) \leq 0 \quad |x+2| = -(x-2)$$

$$\text{et } (2x+4) \geq 0 \quad |2x+4| = (2x+4)$$

$$\Rightarrow x - 1 - x + 2 \geq 2x + 4$$

$$\Rightarrow 1 \geq 2x + 4$$

$$\Rightarrow -3 \geq 2x$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \geq x$$

$-\frac{3}{2}$ est une solution si $x \in I$ avec
???? $I = [-1,5; -2]$, I est contenu
 dans $[-2; 2]$.

Sur $\mathbb{R}$, les solutions possibles sont donc :

$$S = \{[-2,5; -1,5]\} \quad \text{3.5/4}$$

Exercice 5 :

$$(1) \begin{cases} x + 2x - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x - 3z = -7 \\ -3x + y - z = -9 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_2$

$$L_3 = 4L_1 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -3x + y - z = -9 \\ -10y + 14z = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2 = L_3 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \end{cases}$$

$$L_3 = L_3 + 3L_1 \quad \begin{cases} 7y - 10z = 30 \end{cases}$$

$$L_3 = 10L_3 \quad \begin{cases} 70y - 100z = -300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y = 42 - 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times 0 + 9 - 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$S = \{(2, 0, 3)\}$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad + 7z = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -5x \quad + 7z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \end{cases}$$

$$0 = 2$$

impossible

$$S = \emptyset$$

4/4