

1/2 | 3/4/5
4/2.5 | 3/3/3.5

Exercice 1:

1)	P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
	V	V	V	V	V
	V	F	V	F	F
	F	V	V	F	F
	F	F	F	F	V

2)	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
	V	V	V	V	V
	V	F	F	V	F
	F	V	V	F	F
	F	F	V	V	V

3) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est vraie quand P et Q sont vraies toutes les 2, et quand P et Q sont fausses toutes les 2 en même temps.

Or $P \Leftrightarrow Q$ est vraie aussi quand P et Q sont vraies toutes les 2 en même temps et quand P et Q sont fausses toutes les 2 en même temps.

Donc $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 2:

1) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

3) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

• Si f n'est pas minorée, alors par définition $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.

• Si f est minorée, et que $f(y)$ n'est pas le minimum de f dans $\mathbb{R}$, alors, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < f(y)$.

• Si f est minorée et que $f(y), y \in \mathbb{R}$ est le minimum de f , alors $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$ est vraie et $x = y$ ou bien $f(y)$ admet plusieurs antécédents, et dans ce cas $x \neq y$. ?????

2.5/4

Exercice 3:

1) $(P_n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation: $(P_1) : \sum_{k=1}^1 1 = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

donc (P_1) est vraie.

hérédité: on suppose qu'il existe un certain n tel que (P_n) est vraie. ?????????

Montrons que (P_{n+1}) est vraie.

(P_n) est vraie donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n+1) \\ = (n+1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1$$

$$2 \times \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1+1)+(n+2)+(n-1+3)+\dots+(3+n-1)+(2+n)+(1+n+1) \\ = (n+2)+(n+2)+(n+2)+\dots+(n+2)+(n+2)+(n+2) \\ = (n+2)(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a aussi: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(P_{n+1}) est vraie,
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (P_n) est vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) (P_n): \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisation: $1^3 = 1$ et $(1)^2 = 1$

Hérédité: on suppose qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}^*$
tel que (P_n) est vraie. ????????

Montrons que (P_{n+1}) est vraie.

$$(P_n) \text{ est vraie : } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Déterminons ce qu'il faut ajouter à la somme pour passer du rang n au rang $(n+1)$.

• A gauche on ajoute donc $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

• A droite il suffit d'ajouter : $(n+1) \times \sum_{k=1}^n k + (n+1) \times \sum_{k=1}^{n+1} k$

En factorisant : $(n+1) \left(2 \sum_{k=1}^n k \right) + (n+1)(n+1)$

$$= 2(n+1) \times \sum_{k=1}^n k + (n+1)^2$$

$$= \cancel{2}(n+1) \times \frac{(n+1)n}{\cancel{2}} + n^2 + 2n + 1$$

$$= n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

(P_{n+1}) est vraie,

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) est vraie c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

3/4

Exercice 6i

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+6|$$

$$x-1 + |x-2| - |2x+6| \geq 0$$

$$|2x-4| = (2x+4) \text{ si } x \geq -2$$

$$|2x-4| = -(2x+4) \text{ si } x \leq -2$$

$$|x-2| = (x-2) \text{ si } x \geq 2$$

$$|x-2| = -(x-2) \text{ si } x \leq 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$ 2x+4 $	$-(2x+4)$	$\bigcirc$	$2x+4$	$2x+4$
$ x-2 $	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$\bigcirc$	$x-2$
$ x-2 - 2x+4 $	$-(x-2) + (2x+4)$	$-(x-2) - (2x+4)$	$(x-2) - (2x+4)$	

Pour $x \leq -2$:

$$\begin{aligned} x-1 + |x-2| - |2x+4| &\geq 0 \Leftrightarrow x-1 - (x-2) + (2x+4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x-1-x+2+2x+4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Pour $-2 \leq x \leq 2$:

$$\begin{aligned} x-1 + |x-2| - |2x+4| &\geq 0 \Leftrightarrow x-1 - (x-2) - (2x+4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x-1-x+2-2x-4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2x-3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pour $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} x-1 + |x-2| - |2x+4| &\geq 0 \Leftrightarrow x-1 + (x-2) - (2x+4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x-1+x-2-2x-4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -7 \geq 0 \text{ impossible} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}\right]$ **explain!!!**

3/4

Exercice 5:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+2y-3z = -7 & L_1 \\ 4x-2y+2z = 14 & L_2 \\ -3x+y-z = -9 & L_3 \end{cases}$$

$$L_1 = L_1 + L_2 \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$L_1 \rightarrow 5x - z = 7 \Leftrightarrow z = 5x - 7$$

$$L_3 = 2L_3 + L_2 \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -2x = -4 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

$$L_1 \rightarrow z = 5x - 7 \Leftrightarrow z = 5 \times 2 - 7 \Leftrightarrow z = 3$$

Remplaçons x et z dans L_2

$$L_2 \rightarrow 4 \times 2 - 2y + 2 \times 3 = 14 \Leftrightarrow -2y + 14 = 14 \\ \Leftrightarrow y = 0$$

$$y = \{(\underline{x, y, z}, 2, 0, 3)\} \text{ ?????}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+2y-3z = -7 & L_1 \\ 4x-2y+2z = 14 & L_2 \\ -5x+z = -5 & L_3 \end{cases}$$

$$L_1 = L_1 + L_2$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$L_1 \rightarrow 5x - z = 7 \Leftrightarrow z = 5x - 7$$

$$L_3 = L_1 + L_3$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

$\rightarrow$ impossible

$$S = \emptyset$$

3.5/4