Machecourt-Bourgeois
Renaud
AI2 PI

DM : BMS

1	2	3	4	5
3.5	2.5	4	0.5	2

10/11/2020

12.5/20

Exercice 1

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

3)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

On peut donc dire que $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

pourquoi?

3.5/4

Exercice 2 :

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

3) On prouve par l'absurde que sa négation est fausse pour prouver qu'elle est vraie.
donc si $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ est fausse alors $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

?????????

On prend par exemple la fonction $f(x) = x$ et $x = 2$ et $y = 3$
donc $f(x) = 2$ et $f(y) = 3$ donc $f(x) > f(y)$ est faux.
On en déduit que la proposition initiale est donc toujours vraie.

2.5/4

Exercice 3 :

1) Initialisation : Pour $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ car $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

La proposition est vraie au rang 0, supposons qu'elle est vraie au rang (n) et prouvons qu'elle est vraie au rang (n+1).

Hérédité : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

On a prouvé au rang (n+1).

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Initialisation : Pour $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3 = 1$

La proposition est vraie au rang 0, supposons qu'elle est vraie au rang (n) et prouvons qu'elle est vraie au rang (n+1).

Hérédité : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+4n+4)(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

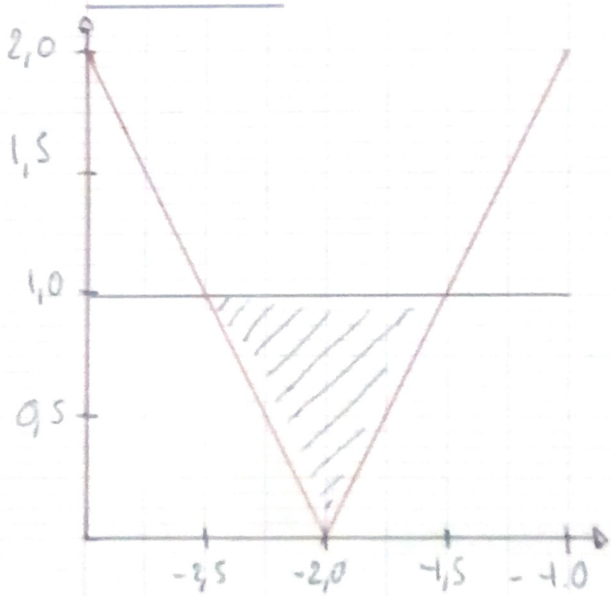
On a prouvé au rang $(n+1)$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{(n+1)+1}{2}\right)^n$$

4/4

Exercice 4 :



J'ai décidé de représenter cela graphiquement :

— $|x-2|+x-1$

— $2|x+2|$

0.5

Je peux en déduire que :

$$-\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$$ **???????**

What happens when x>2?

Exercice 5 :

1) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$ $L_2 = L_2 + 2L_3$ $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x = -4 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$ $L_1 = L_1 - 2L_3$

$\begin{cases} 7x - z = 11 \\ -2x = -4 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$ $\begin{matrix} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_3 \\ L_3 \to L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} -3x + y - z = -9 \\ 7x - z = 11 \\ -2x = -4 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{matrix}}$

2) Ce système ne possède aucune solution. **justify!!!**

2/4