Devoir Maison 1

1	2	3	4	5
4	2.5	4	2.5	4

17/20

EXERCICE 1

Soient P et Q deux propositions logiques :

(1) Établir la table de vérité de la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

(2) Établir la table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

(3) En déduire que la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à $P \Longleftrightarrow Q$

• $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q) = \neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ ①

• $P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

On développe : $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$

$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ ②

On remarque que ① $\Leftrightarrow$ ② donc $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est bien équivalente à $P \Longleftrightarrow Q$. **4/4**

EXERCICE 2

Soit f une fonction de R dans R, on dit que f admet un minimum si la proposition logique suivante est vraie :

$$\exists x \in R, \forall y \in R, f(x) \leq f(y). \quad (1)$$

(1) A quelle proposition logique associerez-vous la définition de "f admet un maximum" ?

« f admet un maximum » $= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(y)$

(2) Quelle serait la définition de "f n'admet pas de minimum" ?

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(y)) = \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y) \quad (2)$$

(3) Pour une fonction f de R dans R, on considère la proposition :

$$\forall y \in R, \exists x \in R, f(x) \leq f(y)$$

Montrer que quelle que soit f, cette dernière proposition est toujours vraie.

On peut traduire cet énoncé par « soit (1) est vraie (f admet donc un minimum), soit (2) est vraie (donc f n'en admet pas), donc : $P \vee \neg P$ ce qui est toujours vrai, la proposition est vraie. ?????

2.5/4

EXERCICE 3

(1) Montrer par récurrence que pour tout n ∈ N* : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

> INITIALISATION : Pour n = 1, $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc P est vraie au rang 1.

> HÉRÉDITÉ : Supposons P_n vraie et démontrons alors que P_{n+1} est vraie aussi pour tout n ∈ N* :

$$P_{n+1} : \text{"} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \text{"}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2+n)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

> CONCLUSION : P_n est vraie pour tout n ∈ N*.

(2) Montrer par récurrence que pour tout n ∈ N ∗ : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

> INITIALISATION : Pour n = 1, $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1$ donc P est vraie au rang 1.

> HÉRÉDITÉ : Supposons P_n vraie et démontrons alors que P_{n+1} est vraie aussi pour tout n ∈ N* :

$$P_{n+1} : \text{"} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \text{"}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(4(n+1)+n^2)}{4} = \frac{(n+1)^2(4n+4+n^2)}{4}$$

IDENTITÉ REMARQUABLE

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

> CONCLUSION : P_n est vraie pour tout n ∈ N*.

4/4

EXERCICE 4

Résoudre dans R l'inéquation suivante : $x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4| \Leftrightarrow x - 1 \geq |2x + 4| - |x - 2|$

↳ $2x+4 \leqslant 0$ si $x \leqslant -2$ ET $2x+4 \geqslant 0$ si $x \geqslant -2$

DONC $|2x+4| = -(2x+4)$ SUR $]-\infty;-2]$ ET $|2x+4| = (2x+4)$ SUR $[-2;+\infty[$

↳ $x-2 \leqslant 0$ si $x \leqslant 2$ ET $x-2 \geqslant 0$ si $x \geqslant 2$

DONC $|x-2| = -(x-2)$ SUR $]-\infty;2]$ et $|x-2| = (x-2)$ SUR $[2;+\infty[$

AINSI :

- SUR $]-\infty;-2]$: $-(2x+4) - (-(x-2)) \leqslant x - 1$

$\Leftrightarrow -2x - 6 \leqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{-5}{2} = -2{,}5$

- SUR $[-2,2]$: $2x+4 + x-2 \leqslant x-1 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{2} = -1{,}5$

- SUR $[2,+\infty[$: $2x+4 - x+2 \leqslant x-1 \Leftrightarrow x+6 \leqslant x-1$

$\Leftrightarrow 6 \leqslant -1 \rightarrow$ PAS DE SOLUTION

Sur R, les solutions de l'inéquation sont les éléments de l'intervalle]-2,5 ; -1,5]

explain!!!

2.5/4

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$ $\begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2+L_1 \\ L_3 \to 2L_3+L_2 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 5x-z=7 \\ -2x=-4 \end{cases}$ $\begin{array}{l} x \leftrightarrow z \\ y \leftrightarrow z \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-3z+x=-7 \\ -z+5x=7 \\ -2x=-4 \end{cases}$ $\begin{array}{l} x=2 \\ z=3 \\ y=0 \end{array}$

Le système d'inconnues {x, y, z} admet pour unique solution (2, 0, 3).

(2) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -5x+z=-5 \end{cases}$ $\begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2-4L_1 \\ L_3 \to L_3-5L_1 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -10y+14z=42 \\ 10y-14z=-40 \end{cases}$ $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \to L_3+L_2 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -10y+14z=42 \\ 0=-40 \end{cases}$

Il n'y a donc aucune solution car 0 n'est pas égal à -40. **4/4**