

Gédon

Valentin

Diray-Komaty

Exercice 1 :

Loïc

Ait-Ouassif

Nagui

Devant maison

12345

19/20

443441) Établir la table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

2) Établir la table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

3) En déduire que $((P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Puisque les deux propositions sont équivalentes car elles ont les mêmes tables de vérité

4/4

Exercice 2 : f admet un minimum : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

1) f admet un maximum : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) f n'admet pas de minimum : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

3) Montrons que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est toujours vraie
 $\forall y \in \mathbb{R}$, si on pose $x = y$ on a $f(x) \leq f(y)$ 4/4

Exercice 3 : Montrons par récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n \geq 1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit P_n la proposition " $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ "

grave logical error!

R1 = initialisation : Vérifions que P_1 est vraie

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}, \text{ on a } 1 = 1 \text{ donc } P(1) \text{ est vraie}$$

R2 = Hérité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on suppose P_n vraie et on veut montrer que

$$P_{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \text{ est vraie}$$

$$\text{On a } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{car on suppose } P_n \text{ vraie}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

R3 = Conclusion : Ainsi par récurrence, nous avons montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est vraie

2) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

Soit P_n la proposition " $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ "

R1: vérifions que $P(1)$ est vraie

$1^3 = (1)^2$ donc $P(1)$ est vraie

R2: On suppose que P_n est vrai pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et on veut montrer que

P_{n+1} : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ est vrai

$$\text{On a } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 \Leftrightarrow 1+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

or d'après la question 1, $\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \end{aligned}$$

R3 = conclusion: Ainsi par récurrence, nous avons montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vrai

Exercice 4 Résolvons $x-1+|x-2| \geq 12x+4$ qui est équivalent à

$$x+|x-2|-12x-4 \geq 1$$

$$12x+4 = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Sur $]-\infty; -2]$, on a $x-x+2+2x+4 \geq 1$ d'où $x \geq -\frac{5}{2}$
l'ensemble des solutions sur $]-\infty; -2]$ est $[-\frac{5}{2}; -2]$

Sur $[2; +\infty[$, on a $x+x-2-2x-4 \geq 1$

$$-6 \geq 1, \text{ impossible}$$

l'ensemble des solutions est $\emptyset$

Sur $[-2; 2]$, on a $x+1-x+2-2x-4 \geq 1$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

l'ensemble des solutions est $[-2; -\frac{3}{2}]$ sur $[-2; 2]$

Sur $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$, on a $x+x-2-2x-4 \geq 1$
 $x \geq \frac{1}{4}$; or $\frac{1}{4} \notin]-\infty; -2]$ donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$

En définitive l'intersection, l'ensemble des solutions est $x \in \emptyset$, $x \in [-\frac{5}{2}; -2]$,
 $x \in [-2; -\frac{3}{2}]$, $x \in \emptyset$ soit $x \in [-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$

Exercice 5 : Déterminer les solutions des systèmes suivants

1)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 3L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ y = (42 - 14z) / -10 \\ 7 \left(\frac{42 - 14z}{-10} \right) - 10z = -30 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7 + 9 = +2 \\ y = \left(\frac{42 - 14z}{-10} \right) = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution $(x, y, z) = (2, 0, 3)$

7

$$\frac{7(42 - 14z)}{-10} - 10z = 29,4 - 9,8z - 10z = -30$$

$$z = \frac{-30 - 29,4}{-19,8} = 3$$

2)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 5L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

$0 \neq 2$ donc ce système n'admet pas de solution.