Florent Boyer
PM 10~~9~~ A 11

Devoir maison : BMS

1	2	3	4	5
3	4	4	0	3

14/20

Exercice n°1 :

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

3)

P	Q	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V	V
F	V	F	F
V	F	F	F
V	V	V	V

↳ d'après le tableau de la question n°1 So what?

3/4

Exercice n°2 :

1) « f admet un maximum » : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) "f n'admet pas de minimum" :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) > f(y)$$

3) Montrons que pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la proposition : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(y)$

soit toujours vraie, quelque soit f.

$\forall y \in \mathbb{R}$, si on pose $x = y$ alors on a $f(x) \leqslant f(y)$

4/4

Exercice n° 3 :

1) $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ On la nomme $P(n)$

. Initialisation $(n=1)$: on a $\sum_{k=1}^{1} 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

donc $P(1)$ est vraie.

• Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie au rang n

c'est à dire $\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$

et montrons qu'elle se transmet au rang $n+1$, on a :

$P(n+1) : \sum_{K=1}^{n+1} K = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

grâce à l'hypothèse de récurrence : $\sum_{K=1}^{n+1} K = \sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$

$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$

$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a montré que $P(1)$ est vraie, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2) Montrer par récurrence : $\sum_{K=1}^{n} K^3 = \left(\sum_{K=1}^{n} K\right)^2$ on l'appelle $P(n)$

* Initialisation ($n=1$) : $P(1) : \sum_{K=1}^{1} 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

* Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie au rang n,

c'est à dire, $\sum_{K=1}^{n} K^3 = \left(\sum_{K=1}^{n}\right)^2$

et montrons qu'elle se transmet au rang $n+1$. On a :

$P(n+1) : \sum_{K=1}^{n+1} K^3 = \left(\sum_{K=1}^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2 \times (n+2)^2}{2^2}$

grâce à l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

4/4

$$= \frac{n^2}{2^2} \times (n+1)^2 + (n+1)(n+1)^2$$

$$= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{2^2}$$

soit $\frac{(n+1)^2 \times (n+2)^2}{2^2}$

Conclusion : Donc, on a montré que $P(1)$ est vraie, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°4 :

Résoudre : $x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4|$

$\cdot\ |x-2| \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

$\cdot\ |2x+4| \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x \leqslant -2 \\ 2x+4 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$

$*\ x \in]-\infty, -2]$

$$x - 1 + (2-x) \geqslant -2x - 4$$
$$x - 1 + 2 - x \geqslant -2x - 4$$
$$2x + x - x \geqslant -5$$
$$2x \geqslant -5$$
$$x \geqslant \frac{-5}{2}$$

$x \in]-\infty ; -2]$

?????

$*\ x \in [-2; 2]$

$$x - 1 + (2-x) \geqslant 2x+4$$
$$\cancel{x} - x + 1 \geqslant 2x + 4$$
$$-3 \geqslant 2x$$
$$-\frac{3}{2} \geqslant x$$

$x \in [-2; 2]$

?????

$*\ x \in [2; +\infty[$

$$x - 1 + x - 2 \geqslant 2x + 4$$
$$2x - 3 \geqslant 7$$
$$0 \geqslant 7 \rightarrow \text{impossible}$$

$x \notin [2; +\infty[$

$\emptyset$

L'ensemble de solution est $\{]-\infty ; -2] \cup [-2 ; 2] \}$

0/4

Florent
Boyer
PM 101 A 11

Exercice n° 5 :

1er système :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{cases} -3x + y - z = -9 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y - 3z = -7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y - z = -9 \\ -2x = -4 \\ 7x - 1z = 11 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{cases} -3x + y - z = -9 \\ 7x - 1z = 11 \\ \boxed{x = 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y - z = -9 \\ 7 \times 2 - 1z = 11 \\ \boxed{z = 3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \times 2 + y - 3 = -9 \\ -6 + y - 3 = -9 \\ \boxed{y = 0} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble de solution est $\{(2, 0, 3)\}$????????

2^{nd} système :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$L_2 \to L_2 - 4L_1$
$L_3 \to L_3 - 5L_1$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

$L_2 + L_3$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$\to$ impossible

donc l'ensemble de solution est $\emptyset$

3/4