

Ex 1:

①

P	Q	$P \vee Q$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

②

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

③

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Le tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$ équivaut à celui de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

Exercice 2:

① $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

② $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

③ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

On démontre donc que la négation de cette proposition est fausse

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$???????

Exercice 3:

1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation: $n=1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, initialisée à partir du rang $n=1$.

Hérédité: On suppose q.e. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$?????????????????

Démontrons alors que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$\text{et } \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ à partir du rang } n=1$$

2) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

Initialisation: $n=1$: $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1$, vérifiée au rang $n=1$.

Hérédité: On suppose q.e. $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$?????????????????

On cherche donc à démontrer $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On pose: } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)(n+1)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2.$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée et initialisée au rang $n=1$ et héréditaire. On a donc:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad 3/4$$

Exercice 4:

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

$$x-2 = \begin{cases} -x+2, & x \leq 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$2x+4 = \begin{cases} 2x+4, & x \geq -2 \\ -2x-4, & x \leq -2 \end{cases}$$

$$\boxed{x \in [2; +\infty[} : x-1+x-2 \geq 2x+4 \\ 2x-3 \geq 2x+4 \rightarrow \text{impossible car } -3 \not\geq 4.$$

$$\boxed{x \in [-2; 2]} : x-1-x+2 \geq 2x+4 \\ 1 \geq 2x+4 \\ -3 \geq 2x \Rightarrow \boxed{x \leq -\frac{3}{2} \in [-2; 2]} \quad \text{????}$$

$$\boxed{x \in]-\infty; -2]} : x-1-x+2 \geq -2x-4 \\ 1 \geq -2x-4 \\ 5 \geq -2x \rightarrow \boxed{x \geq -\frac{5}{2} \in]-\infty; -2]} \quad \text{????}$$

L'ensemble des solutions est: $\boxed{]-\infty; -2] \cup [-2; 2]}$???????

Exercice 5.

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow 10L_3 + 7L_2 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$$\boxed{z = 3}$$

$$-10y + 42 = 42 \rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$x - 9 = -7 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$S = \{(2, 0, 3)\}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 5L_1 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

impossible

$$\boxed{S = \emptyset}$$